http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

Теория автоматического управления

1 семестр

Тема 8

ЛАЧХ типовых элементарных звеньев

Теория

Общее понятие о логарифмических частотных характеристиках

При исследовании САУ часто используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) $L(\omega)$, показывающие усиление мощности сигнала при прохождении через звено (систему). При их построении по оси абсцисс откладывается $\lg\omega$ и соответствующие им значения частоты ω, а по оси ординат $L(\omega)$. В общем случае ЛАЧХ измеряется в белах. Нужно учитывать, что:

- 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз,
- 2 бела – в 100 раз,
- 3 бела – в 1000 раз.

Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg A^2 = 2\lg A$, то усиление мощности, выраженное в отношении амплитуд $A(\omega)$ равно $2\lg A(\omega)$. Соответственно в децибелах

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega).$$

При этом для характерных точек соотношения между $A(\omega)$ и $L(\omega)$ следующие:

	0,001	0,01	0,1	0,316	0,89	1	1,12	3,16	10	100	1000
L, дб	-60	-40	-20	-10	-1	0	1	10	20	40	60

В качестве единицы измерения частоты используют логарифмическую единицу <u>декаду</u>. Частоты ω_1 и ω_2 отличаются на 1 декаду, если $\frac{\omega_2}{\omega_1}=10$.

Расположение графика ЛАЧХ выше оси абсцисс означает <u>усиление</u> выходного сигнала, поскольку при этом 20lg$A(\omega)$>0. Следовательно, $A(\omega)$>1, откуда можно сделать вывод о том, что $\frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}$>1. Другими словами, $A_{ВЫХ}$ (ω)>$A_{ВХ}(\omega)$. Соответственно расположение графика ЛАЧХ ниже оси абсцисс означает <u>ослабление</u> выходного сигнала $A_{ВЫХ}$ (ω)<$A_{ВХ}(\omega)$. А пропускание сигнала через звено (систему) без изменения амплитуды происходит на <u>частоте среза</u> ω_c, при которой $L(\omega_c)$=0 и, следовательно, $A_{ВЫХ}$ (ω)=$A_{ВХ}(\omega)$.

Точка ω=0 лежит на оси частот слева в бесконечности, поскольку lg 0= -∞. Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от оси ординат на оси частот размещалась та часть ЛАЧХ, особенности которой требуется исследовать.

Применение ЛАЧХ дает следующие преимущества.

<u>Во-первых</u>, для цепочки последовательно соединенных звеньев ПФ представляет собой произведение ПФ входящих в цепочку звеньев (подробно будет рассмотрено ниже) $W(p)=\prod_{i=1}^{n}W_i(p)$. Отсюда АФХ

$$W(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}W_i(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)\prod_{i=1}^{n}e^{j\varphi(\omega)}=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)\cdot e^{j\sum_{i=1}^{n}\varphi(\omega)}$$

Следовательно, АЧХ в обычном масштабе частот представляет собой произведение АЧХ всех составляющих

$$A(\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega),$$

а ФЧХ последовательного соединения – сумму ФЧХ всех составляющих

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega).$$

При логарифмировании выражение (12) превращается в сумму

$$20\lg A(\omega) = 20\lg \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) = 20\sum_{i=1}^{n} \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega).$$

Следовательно, ЛАЧХ соединения можно получить как геометрическую сумму ЛАЧХ отдельных звеньев.

Во-вторых, при применении логарифмического масштаба кривизна характеристик изменяется, и в большинстве случаев возникает возможность упрощенно изображать частотные характеристики ломаными линиями. Это так называемые *асимптотические* характеристики.

Поскольку фазовый сдвиг последовательной цепочки представляет собой сумму фазовых сдвигов на отдельных ее звеньях, использование логарифмического масштаба на оси ординат фазовой характеристики не имеет смысла. Поэтому логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ) строится в полулогарифмических координатах в виде зависимости φ от $\lg\omega$, чтобы ЛАЧХ и ЛФЧХ были связаны одним масштабом по оси абсцисс.

Пропорциональное звено (П-звено)

АЧХ данного звена имеет $A(\omega)=k$. Отсюда ЛАЧХ $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg k$ - независимо от частоты. График проходит параллельно оси частот (рис. 1).

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

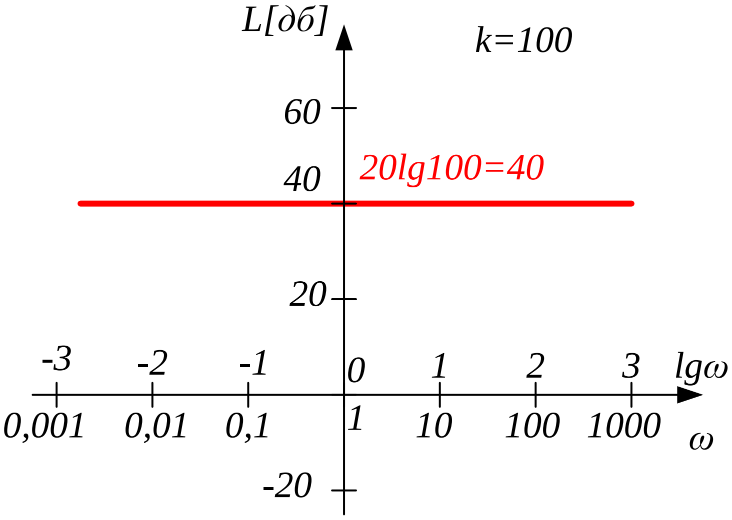

Рисунок 1. ЛАЧХ П-звена с k=100

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

Апериодическое А-звено

Формула АЧХ данного звена

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}.$$

Поэтому истинная ЛАЧХ апериодического звена описывается уравнением

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

Построим асимптотическую ЛАЧХ. В полученном выражении 20lg$k$ – константа, не зависящая от частоты ω. В то же время второе слагаемое зависит от частоты, причем на малых и больших частотах эта зависимость совершенно разная. Поэтому можно сделать некоторые допущения. Для этого выделим участки:

- <u>малые частоты</u> $0 \le \omega \le \omega_0$, где $\omega_0 = \frac{1}{T}$ - *сопрягающая частота*. Здесь можно считать, что величина $T^2\omega^2$ значительно меньше 1, следовательно ей можно пренебречь: $20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1} \approx 20\lg 1 \approx 0$. Поэтому асимптотическая ЛАЧХ на этом участке

$$L_{a1}(\omega) = 20\lg k$$

представляет собой прямую, параллельную оси частот. Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую* частоту $\omega_0 = \frac{1}{T}$, апериодическое звено ведёт себя как пропорциональное, оно просто усиливает входной сигнал;

- <u>большие частоты</u> $\omega_0 \le \omega \le \infty$. Здесь можно считать, что $T^2\omega^2$ значительно больше 1, поэтому единицей можно пренебречь: $\sqrt{T^2\omega^2+1} \approx \sqrt{T^2\omega^2} = T\omega$. Поэтому асимптотическая ЛАЧХ на данном отрезке частот будет иметь вид

$$L_{a2}(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega.$$

Определим её наклон на 1 декаду. Для этого возьмём произвольные частоты ω_1 и ω_2, отличающиеся друг от друга на декаду: $\frac{\omega_2}{\omega_1}=10$ и найдём $\Delta L = L_{a2}(\omega_2) - L_{a2}(\omega_1)$ на одну декаду, учитывая соотношение $\omega_2 = 10\omega_1$:

$$\Delta L = +20\lg k - 20\lg T\omega_2 - 20\lg k + 20\lg T\omega_1 = -20\lg T - 20\lg(10\omega_1) + 20\lg T + 20\lg\omega_1 = -20\lg 10 - 20\lg\omega_1 + 20\lg\omega_1 = -20\cdot 1 = -20 дб/дек.$$

Ошибка по сравнению с истинной ЛАЧХ на малых частотах

$$\delta_1(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} - 20\lg k = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2},$$

а на больших – $\delta_2(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) =$

$$20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} - (20\lg k - 20\lg T\omega) = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} + 20\lg T\omega.$$

Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\left(\frac{1}{T}\right)^2} = -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб},$$

причем она не зависит от параметров T и k. Малая величина данной ошибки позволяет сделать первичную оценку звена (определить *частоту среза* ω_c и диапазон частот, где происходит усиление входного сигнала) по его параметрам элементарным построением асимптотической ЛАЧХ (рис. 2). Для этого:

- на оси частот находится сопрягающая частота ω_0;
- на участке $\omega \le \omega_0$ проводится прямая, параллельная оси частот на расстоянии $20\lg k$;
- на участке $\omega > \omega_0$ через точку с координатами (ω_0; $20\lg k$) проводится прямая под наклоном (-20 дб/дек).

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

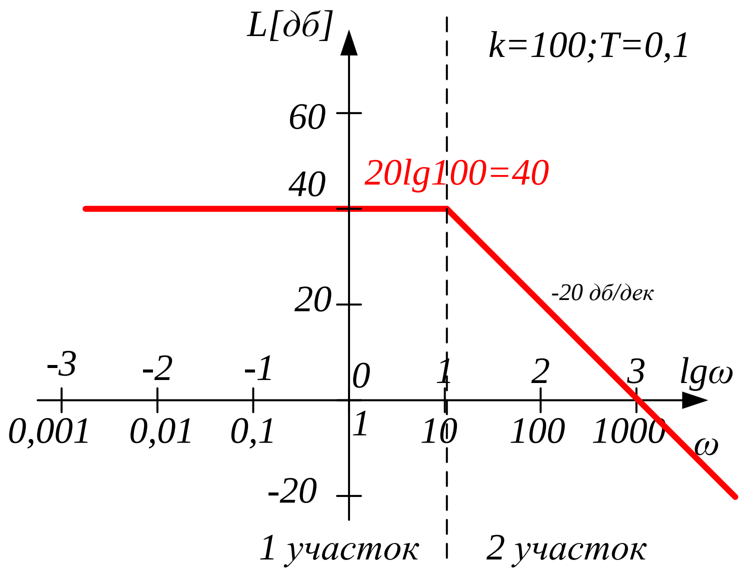

Рисунок 2. ЛАЧХ П-звена с k=100 и T=0,1

Интегрирующее звено (И-звено)

Идеальное интегрирующее звено (астатическое звено)

ПФ данного звена АЧХ $A(\omega)=\dfrac{k}{\omega}$. Поэтому ЛАЧХ описывается выражением

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\omega} = 20\lg k - 20\lg\omega.$$

Это прямая с наклоном ΔL на 1 декаду, рассчитываемым как

$$\Delta L = 20\lg k - 20\lg 10\omega_1 - 20\lg k + 20\lg\omega_1 = -20 \text{ дб/дек.}$$

Ось абсцисс ЛАЧХ пересекает на частоте среза ω_c при выполнении условия $L(\omega_c)=0$, откуда согласно (16) $20\lg k = 20\lg\omega_c$. Следовательно, для идеального И-звена $\omega_c = k$. Таким образом, построение его ЛАЧХ сводится к построению прямой с наклоном -20 дб/дек в точке с координатами $(\omega_c; k)$ (рис. 3). Прямую $\omega=1$ ЛАЧХ пересекает в точке

$$L(1) = 20\lg k - 20\lg 1 = 20\lg k.$$

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

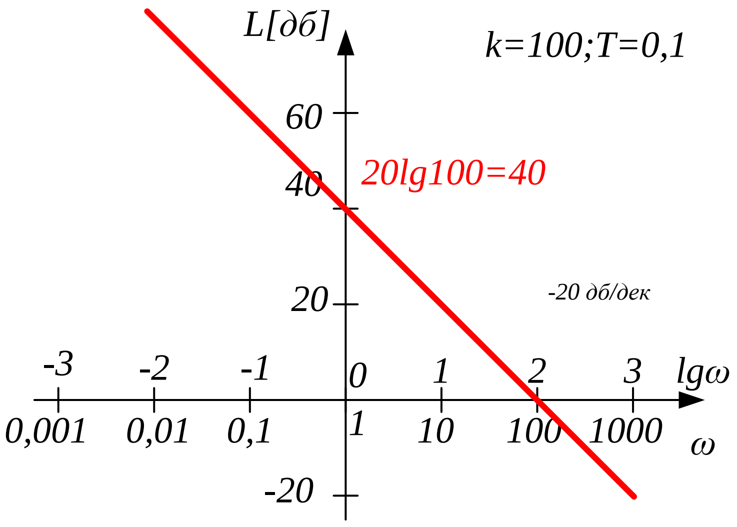

Рисунок 3. ЛАЧХ ИИ-звена с k=100

Реальное интегрирующее звено

АЧХ РИ-звена $A(\omega)=\dfrac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}}$.

ЛАЧХ реального И-звена описывается уравнением

$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\omega-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}\ . \tag{25}$$

Применив допущения для малых и больших частот, сделанные для А-звена, построим асимптотическую ЛАЧХ реального И-звена по участкам:

- <u>малые частоты</u> $0\le\omega\le\dfrac{1}{T}$ - здесь формула асимптотической ЛАЧХ

$$L_{a1}(\omega)=20\lg k-20\lg\omega$$

совпадает с ЛАЧХ ИИ-звена, имеет наклон –20 дб/дек. Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую частоту* $\omega_0=\dfrac{1}{T}$, РИ-звено ведёт себя как идеальное;

- <u>большие частоты</u> $\dfrac{1}{T}\le\omega\le\infty$:

$$L_{a2}(\omega)=20\lg k-20\lg\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2}=$$

$$20\lg k-20\lg\omega-20\lg T-20\lg\omega=20\lg\frac{k}{T}-40\lg\omega\,.$$

Найдем наклон асимптотической ЛАЧХ на одну декаду

$$\Delta L = 20\lg\frac{k}{T} - 40\lg(10\omega_1) - 20\lg\frac{k}{T} + 40\lg\omega_1 = -40\lg 10 - 40\lg\omega_1 + 40\lg\omega_1 = -40 \text{ дб/дек.}$$

Ошибка по сравнению с истинной ЛАЧХ на малых частотах

$$\delta_1(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} -$$

$$20\lg k - 20\lg\omega = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2},$$

на больших –

$$\delta_2(\omega) = L(\omega) - L_{a2}(\omega) =$$

$$20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} -$$

$$20\lg k + 20\lg T + 40\lg\omega = 20\lg T\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\left(\frac{1}{T}\right)^2} = -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб.}$$

Таким образом, как и для апериодического звена, первичную оценку ЧХ РИ-звена по его параметрам можно осуществить с помощью построения асимптотической ЛАЧХ (рис. 9):

- на оси частот находится *сопрягающая частота* $\omega_0 = \frac{1}{T}$;
- на участке $\omega \le \omega_0$ проводится прямая под наклоном (-20 дб/дек) через точку (ω=1; 20lg$k$) до пересечения с прямой $\omega=\omega_0$;
- вправо от полученной точки, на участке $\omega>\omega_0$, проводится прямая под наклоном (-40 дб/дек).

На рис. 4 показан пример ЛАЧХ для РИ-звена с параметрами k=100, T=0,1. Для него частота ω=1, через которую проведена ось ординат, принадлежит участку малых частот.

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

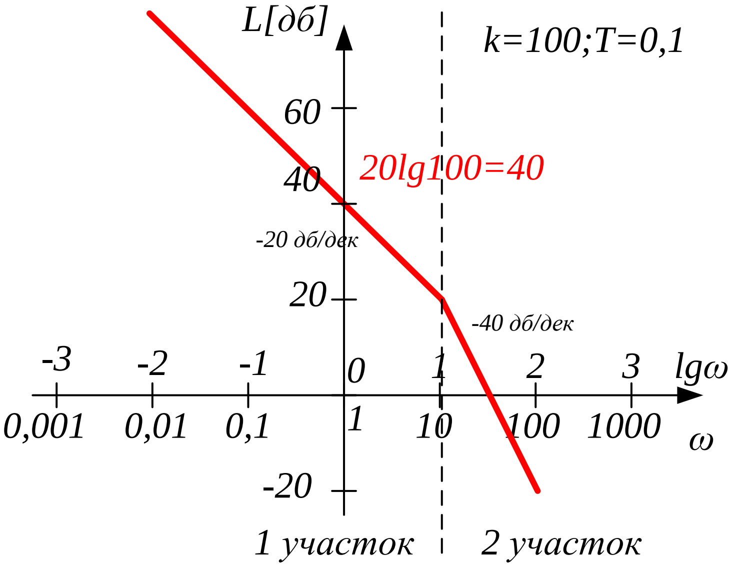

Рисунок 4. ЛАЧХ РИ-звена с k=100, T=0,1

На рис. 5 показан пример ЛАЧХ для РИ-звена с параметрами k=100, T=10. Для него частота ω=1, через которую проведена ось ординат, принадлежит участку больших частот, но продолжение ЛАЧХ первого участка (показано пунктиром) все равно пересекает ось ординат на значении 20lgk=20 lg100=40.

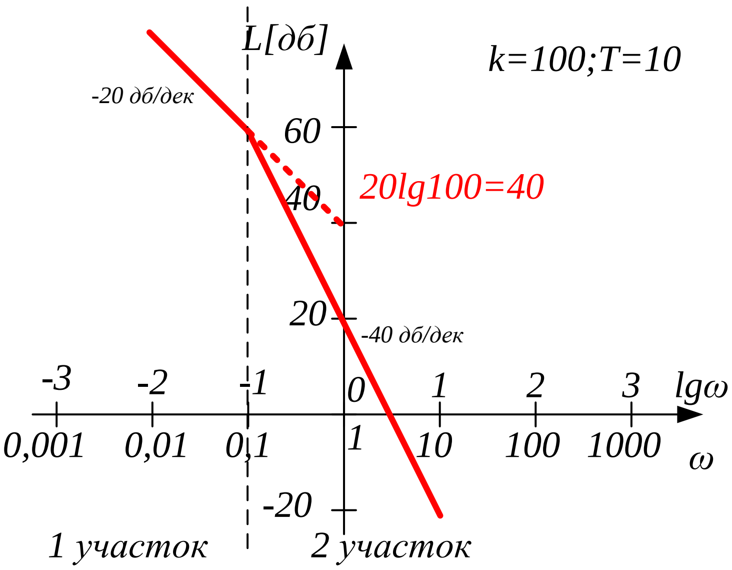

Рисунок 5. ЛАЧХ РИ-звена с k=100, T=10

Дифференцирующее звено

Идеальное дифференцирующее звено

АЧХ описывается уравнением

$$A(\omega) = k\omega.$$

ЛАЧХ данного звена описывается уравнением

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega.$$

Найдем её наклон на одну декаду:

$$\Delta L = 20\lg k + 20\lg(10\omega_1) - 20\lg k - 20\lg \omega_1 = 20\lg 10 = 20 \text{ дб/дек.}$$

Для *частоты среза* справедливо соотношение $L(\omega_c)=0$ или $20\lg k + 20\lg \omega = 0$. Отсюда получаем простейшее уравнение $\lg k = -\lg \omega_c$, из которого определяем *частоту среза*

$$\omega_c = \frac{1}{k}.$$

Для построения ЛАЧХ идеального Д-звена на оси абсцисс находим $\omega_c = \frac{1}{k}$ и проводим прямую с наклоном +20дб/дек. Очевидно, что если $k<1$, то $\omega_c = \frac{1}{k}>1$, следовательно, пересечение с осью $\omega = 1$ ($lg\omega = 0$) будет расположено в отрицательной полуплоскости (прямая 1 на рис. 6, показана красным цветом), поскольку для указанных условий $\lg k<0$. Если $k>1$, то $\omega_c = \frac{1}{k}<1$, следовательно, пересечение с осью $\omega = 1$ ($lg\omega = 0$) будет расположено в отрицательной полуплоскости (прямая 2 на рис. 6, показана синим цветом), поскольку для указанных условий $\lg k>0$.

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

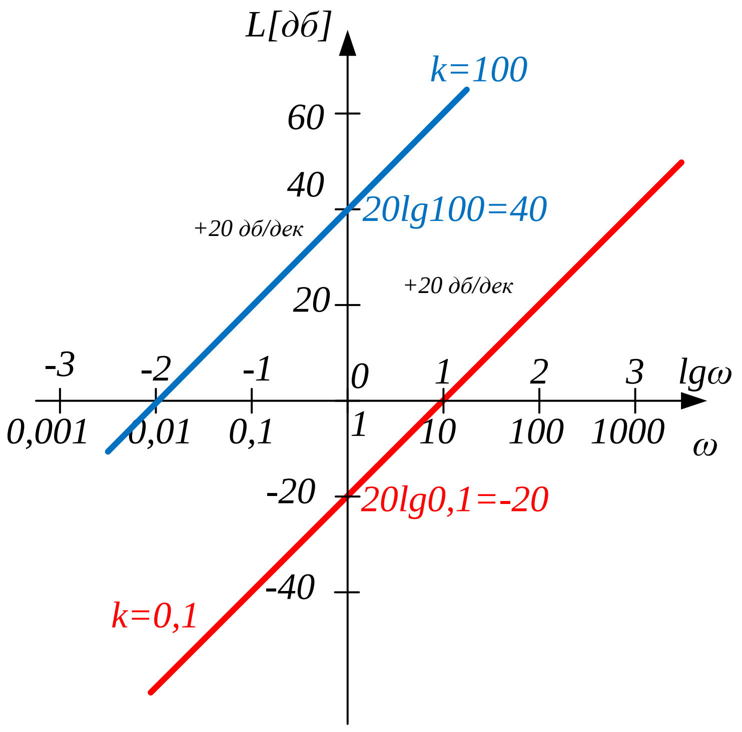

Рисунок 6. ЛАЧХ ИД-звена с k=100 и k=0,1

Реальное дифференцирующее звено

Уравнение АЧХ данного звена

$$A(\omega) = \omega k \cdot \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

ЛАЧХ данного звена описывается уравнением

$$L(\omega)=20lg(k) +20lg(\omega) - 20lg\left(\sqrt{1+T^2\omega^2}\right).$$

Как и в рассмотренных ранее случаях, построение асимптотической ЛАЧХ осуществляется по участкам (рис. 7):

- <u>малые частоты</u> $0 \le \omega \le \omega_0$. С применением тех же допущений уравнение асимптотической ЛАЧХ реального Д-звена на этом участке приобретает вид

$$L_a(\omega)=20lg(k) +20lg(\omega),$$

совпадающий с видом ЛАЧХ идеального Д-звена, имеющей наклон +20 дб/дек. Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую частоту* ω_0, реальное Д-звено ведёт себя как идеальное. Очевидно, если *частота среза* ω_c принадлежит данному отрезку частот, то она равна $\omega_c = \frac{1}{k}$;

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/

- большие частоты $\omega_0 \le \omega \le \infty$. В этом случае уравнение асимптотической ЛАЧХ на данном отрезке частот будет иметь вид:

$$L_a(\omega)=20lgk+20lg\,\omega-20lg\,T\omega=20lgk+20lg\,\omega-20lg\,\omega-20lg\,T=20lg\frac{k}{T} -$$

прямая, параллельная оси абсцисс.

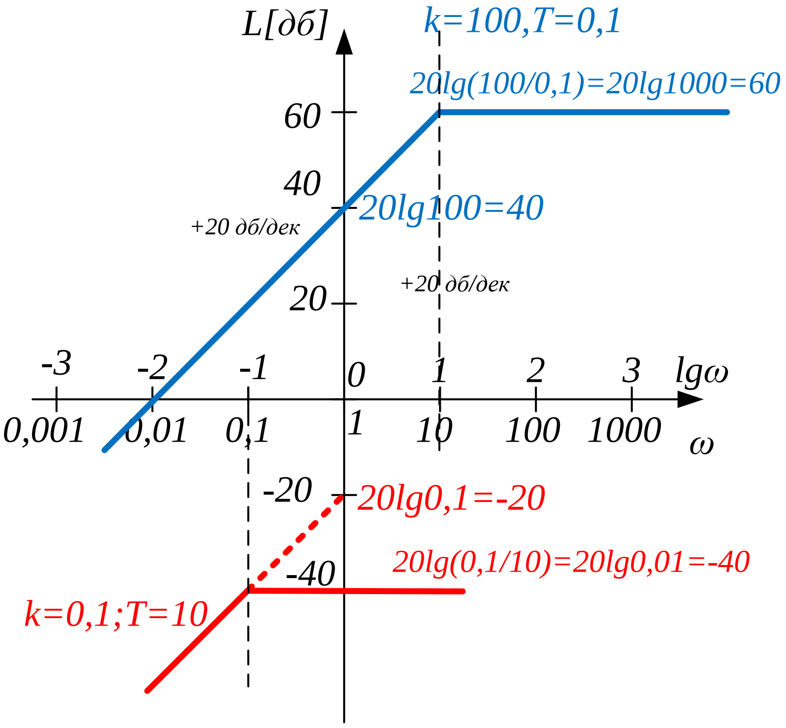

Рисунок 7. ЛАЧХ РД-звеньев с k=100, T=0,1 и k=0,1, T=10

Лучше начинать построение асимптотической ЛАЧХ со второго участка, с прямой, параллельной оси частот. Рассчитываем 20lgk/T и проводим прямую до границы участков. Потом достраиваем первый участок с наклоном +20 дб/дек.

Истинные ЛАЧХ всех реальных звеньев (А-, РИ- и РД-) отличаются от асимптотических в окрестностях сопрягающей частоты. Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\left(\frac{1}{T}\right)^2} = -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб.}$$

http://cifra.studentmiv.ru/tau-1-8-teoriya/