Основы логики и логические основы компьютера

1. Формы мышления

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные древнегреческими мыслителями. Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы мышления (речи) от его содержания.

Логика — это наука о формах и способах мышления.

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира. Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

Мышление всегда осуществляется в каких-то формах. Основными формами мышления являются *понятие, высказывание* и *умозаключение.*

Понятие. Понятие выделяет существенные признаки объекта, которые отличают его от других объектов. Объекты, объединенные понятием, образуют некоторое множество. Например, понятие «компьютер» объединяет множество электронных устройств, которые предназначены для обработки информации и обладают монитором и клавиатурой. Даже по этому короткому описанию компьютер трудно спутать с другими объектами, например с механизмами, служащими для перемещения по дорогам и хранящимися в гаражах, которые объединяются понятием «автомобиль».

Понятие - это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

Понятие имеет две стороны: содержание и объем. Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков объекта. Чтобы раскрыть содержание понятия, следует найти признаки, необходимые и достаточные для выделения данного объекта из множества других объектов.

Например, содержание понятия «персональный компьютер» можно раскрыть следующим образом: «Персональный компьютер — это универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя».

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется. Объем понятия «персональный компьютер» выражает всю совокупность (сотни миллионов) существующих в настоящее время в мире персональных компьютеров.

Высказывание. Свое понимание окружающего мира человек формулирует в форме высказываний (суждений, утверждений). Высказывание строится на основе понятий и по форме является повествовательным предложением.

Высказывания могут быть выражены с помощью не только естественных языков, но и формальных. Например, высказывание на естественном языке имеет вид «Два умножить на два равно четырем», а на формальном, математическом языке оно записывается в виде: «$2 \cdot 2 = 4$».

Об объектах можно судить верно или неверно, то есть высказывание может быть истинным или ложным. Истинным будет высказывание, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. Примером истинного высказывания может служить следующее: «Процессор является устройством обработки информации».

Ложным высказывание будет в том случае, когда оно не соответствует реальной действительности, например: «Процессор является устройством печати».

Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением, так как оценка их истинности или ложности невозможна.

Конечно, иногда истинность того или иного высказывания является относительной. Истинность высказываний может зависеть от взглядов людей, от конкретных обстоятельств и так далее. Сегодня высказывание «На моем компьютере установлен самый современный процессор Pentium 4» истинно, но пройдет некоторое время, появится более мощный процессор, и данное высказывание станет ложным.

Высказывание - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть либо **истинно**, либо **ложно**.

До сих пор мы рассматривали простые высказывания. На основании простых высказываний могут быть построены составные высказывания. Например, высказывание «Процессор является устройством обработки информации и принтер является устройством печати» является *составным высказыванием*, состоящим из двух простых, соединенных союзом «и».

Если истинность или ложность простых высказываний устанавливается в результате соглашения на основании здравого смысла, то истинность или ложность составных высказываний вычисляется с помощью использования алгебры высказываний.

Приведенное выше составное высказывание истинно, так как истинны входящие в него простые высказывания.

Умозаключение. Умозаключения позволяют на основе известных фактов, выраженных в форме суждений (высказываний), получать заключение, то есть новое знание. Примером умозаключений могут быть геометрические доказательства.

Например, если мы имеем суждение «Все углы треугольника равны», то мы можем путем умозаключения доказать, что в этом случае справедливо суждение «Этот треугольник равносторонний ».

Умозаключение - это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

Посылками умозаключения по правилам формальной логики могут быть только истинные суждения. Тогда, если умозаключение проводится в соответствии с правилами формальной логики, то оно будет истинным. В противном случае можно прийти к ложному умозаключению.

2. Алгебра высказываний

Алгебра высказываний была разработана для того, чтобы можно было определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание.

В алгебре высказываний суждениям (простым высказываниям) ставятся в соответствие *логические переменные*, обозначаемые прописными буквами латинского алфавита. Рассмотрим два простых высказывания:

А = «Два умножить на два равно четырем». В = «Два умножить на два равно пяти».

Высказывания, как уже говорилось ранее, могут быть истинными или ложными. Истинному высказыванию соответствует значение логической переменной 1, а ложному — значение 0. В нашем случае первое высказывание истинно (А = 1), а второе ложно (В = 0).

В алгебре высказываний **высказывания** обозначаются именами логических переменных, которые могут принимать лишь два значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

В алгебре высказываний над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.

Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».

2.1. Логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и» называется операцией *логического умножения или конъюнкцией.*

Составное высказывание, образованное в результате операции **логического умножения (конъюнкции)**, истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

Так, из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического умножения, истинно только четвертое, так как в первых трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний ложно:

(1) «2 • 2 = 5 и 3 • 3 = 10»,
(2) «2 • 2 = 5 и 3 • 3 = 9»,
(3) «2 -2 = 4 и 3 • 3 = 10»,
(4) «2 • 2 = 4 и 3 • 3 = 9».

Перейдем теперь от записи высказываний на естественном языке к их записи на формальном языке алгебры выбываний (алгебры логики). В ней операцию логического умножения (конъюнкцию) принято обозначать значком «&» либо «^». Образуем составное высказывание *F,* которое получится в результате конъюнкции двух простых высказываний:

$$F = A \ \& \ B.$$

С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического умножения, аргументами которой являются логические переменные *A* и *B,* которые могут принимать значения «истина» (1) и «ложь» (0). Сама функция логического умножения *F* также может принимать лишь два значения «истина» (1) и «ложь» (0). Значение логической функции можно определить с помощью *таблицы истинности* данной функции, которая показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов (табл. 1).

Таблица 1. Таблица истинности функции логического умножения

A	B	*F=A&B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

По таблице истинности легко определить истинность составного высказывания, образованного с помощью операции логического умножения. Рассмотрим, например, составное высказывание «2 • 2 = 4 и 3 • 3 = 10». Первое простое высказывание истинно (А = 1), а второе высказывание ложно *(B* = 0), по таблице определяем, что логическая функция принимает значение ложь *(F* = 0), то есть данное составное высказывание ложно.

2.2. Логическое сложение (дизъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний с помощью союза «или» называется *операцией логического сложения* или *дизъюнкцией.*

Составное высказывание, образованное в результате **логического сложения (дизъюнкции),** истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

Так, из приведенных ниже четырех составных высказываний, образованных с помощью операции логического сложения, ложно только первое, так как в последних трех составных высказываниях хотя бы одно из простых высказываний истинно:

(1) «2-2 = 5 или 3 • 3 = 10»
(2) «2 • 2 = 5 или 3 • 3 = 9»
(3) «2 • 2 = 4 или 3 • 3 = 10»
(4) «2-2 = 4 или 3 • 3 = 9».

Запишем теперь операцию логического сложения на формальном языке алгебры логики. Операцию логического сложения (дизъюнкцию) принято обозначать либо значком «$\vee$», либо знаком сложения «+». Образуем составное высказывание *F,* которое получится в результате дизъюнкции двух простых высказываний:

$F = A \vee B$. С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического сложения, аргументами которой являются логические переменные *A* v *B.* Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности данной функции, которая показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов (табл. 2).

Таблица 2. Таблица истинности функции логического сложения

A	*B*	$F = A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

По таблице истинности легко определить истинность со ставного высказывания, образованного с помощью операции логического сложения. Рассмотрим, например, составное высказывание «2 • 2 = 4 или 3 • 3 = 10». Первое простое высказывание истинно $(A = 1)$, а второе высказывание ложно $(B = 0)$, по таблице определяем, что логическая функция принимает значение истина $(F = 1)$, то есть данное составное высказывание истинно.

2.3. Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы «не» к высказыванию называется *операцией логического отрицания* или *инверсией.*

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное — истинным.

Пусть *A* = «Два умножить на два равно четырем» — истинное высказывание, тогда высказывание *F* = «Два умножить на два не равно четырем», образованное с помощью операции логического отрицания,   — ложно.

Операцию логического отрицания (инверсию) над логическим высказыванием *A* в алгебре логики принято обозначать $\neg A$. Образуем высказывание *F*, являющееся логическим отрицанием *A*:

$F = \neg A$.

Истинность такого высказывания задается таблицей истинности функции логического отрицания (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности функции логического отрицания

A	***F= ¬A***
0	**1**
1	**0**

Истинность высказывания, образованного с помощью операции логического отрицания, можно легко определить с помощью таблицы истинности. Например, высказывание «Два умножить на два не равно четырем» ложно (А = 0), а полученное из него в результате логического отрицания высказывание «Два умножить на два равно четырем» истинно *(F* = 1).

3. Логические выражения и таблицы истинности

Логические выражения. Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят *логические переменные,* обозначающие высказывания, и *знаки логических операций,* обозначающие логические функции.

Для записи составного высказывания в виде логического выражения на формальном языке (языке алгебры логики) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Запишем в форме логического выражения составное высказывание **(2 • 2 = 5 или 2 • 2 = 4) и (2 • 2 ≠ 5 или 2 • 2≠ 4)**. Проанализируем составное высказывание. Оно содержит два простых высказывания:

А = «**2 • 2 = 5**» — ложно (0),

В = «**2 • 2 = 4**» — истинно (1).

Тогда составное высказывание можно записать в следующей форме:

«**(А или *В)* и *(¬А* или *(*¬В)**».

Теперь необходимо записать высказывание в форме логического выражения с учетом последовательности выполнения логических операций. При выполнении логических операций определен следующий порядок их выполнения: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Для изменения указанного порядка могут использоваться скобки:

$\boldsymbol{F = (A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee \neg B).}$

Истинность или ложность составных высказываний можно определять чисто формально, руководствуясь законами алгебры высказываний, не обращаясь к смысловому содержанию высказываний.

Подставим в логическое выражение значения логических переменных и, используя таблицы истинности базовых логических операций, получим значение логической функции:

$\boldsymbol{F = (A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee (\neg B)) = (0 \vee 1) \,\&\, (1 \vee 0) = 1 \,\&\, 1 = 1}$.

Таблицы истинности. Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить таблицу истинности, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий.

Во-первых, необходимо определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение. Если количество логических переменных равно *n,* то:

$$\text{количество строк} = 2^n.$$

В нашем случае логическая функция $F = (A \lor B) \& (\neg A \lor \neg B)$ имеет 2 переменные[1] и, следовательно, количество строк в таблице истинности должно быть равно 4.

Во-вторых, необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.

В нашем случае количество переменных равно двум, а количество логических операций — пяти, то есть количество столбцов таблицы истинности равно семи.

В-третьих, необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, обозначить столбцы и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

В-четвертых, необходимо заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности (табл. 4). Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Таблица 4. Таблица истинности логической функции $F = (A \lor B) \& (\neg A \lor \neg B)$

A	*B*	*A∨B*	*A*	*B*	*A∨B*	*(A∨B)&(¬A∨¬B)*
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Равносильные логические выражения. Логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают, называются *равносильными.* Для обозначения равносильных логических выражений используется знак «=».

Докажем, что логические выражения $\neg A \& \neg B$ и $\neg(A \lor B)$ равносильны. Построим сначала таблицу истинности логическое выражения $\neg A \& \neg B$ (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности логического выражения $\neg A \& \neg B$

A	*B*	*A*	*B*	*¬A&¬B*
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Теперь построим таблицу истинности логического выражения $\neg(A \lor B)$ (табл. 6).

Таблица 6. Таблица истинности логического выражения $\neg(A \lor B)$

A	*B*	*A∨B*	*¬(A∨B)*
0	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*1*	*0*
1	*1*	*1*	*0*

Значения в последних столбцах таблиц истинности совпадают, следовательно, логические выражения равносильны:

[1] Переменные А и В

$$\neg A \ \& \ \neg B = \neg(A \vee B).$$

4. Логические функции

Любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию $F(X_1\ X_2, \ldots, X_n)$, аргументами которой являются логические переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (простые высказывания). Сама функция и аргументы могут принимать только два различных значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

Выше были рассмотрены функции двух аргументов: логическое умножение $F(A,B) = A\&B$, логическое сложение $F(A,B) = A \vee B$, а также логическое отрицание $F(A) = \neg A$, в котором значение второго аргумента можно считать равным нулю.

Каждая логическая функция двух аргументов имеет четыре возможных набора значений аргументов. По формуле (2.1) мы можем определить, какое количество различных логических функций двух аргументов может существовать:

$N = 2^4 = 16.$

Таким образом, существует 16 различных логических функций двух аргументов, каждая из которых задается своей таблицей истинности (табл. 7).

Таблица 7. Таблицы истинности логических функций двух аргументов

Аргу-менты		Логические функции															
A	*B*	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Легко заметить, что здесь логическая функция F_2 является функцией логического умножения, F_8 — функцией логического сложения, F_{13} — функцией логического отрицания для аргумента *А и* F_{11} — функцией логического отрицания для аргумента *В*.

В обыденной и научной речи кроме базовых логических связок «и», «или», «не» используются и некоторые другие: «если... то...», «... тогда и только тогда, когда...» и др. Некоторые из них имеют свое название и свой символ, и им соответствуют определенные логические функции.

Логическое следование (импликация)[2]. Логическое следование (импликация) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если ..., то ...».

Логическая операция импликации «если *А,* то Б», обозначается А→В выражается с помощью логической функции F_{14}, которая задается соответствующей таблицей истинности (табл. 8).

Таблица 8. Таблица истинности логической функции «импликация»

A	***B***	$F_{14} = A \to B$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Составное высказывание, образованное с помощью операции **логического следования (импликации)**, ложно тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки (первого высказывания) следует ложный вывод (второе высказывание).

[2] Более полную информацию об импликации см. в Википедии

Например, высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 5» истинно, так как истинны и первое высказывание (предпосылка), и второе высказывание (вывод).

Высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 3» ложно, так как из истинной предпосылки делается ложный вывод.

Однако операция логического следования несколько отличается от обычного понимания слова «следует». Если первое высказывание (предпосылка) ложно, то вне зависимости от истинности или ложности второго высказывания (вывода) составное высказывание истинно. Это можно понимать таким образом, что из неверной предпосылки может следовать что угодно.

В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены путем логических преобразований к трем базовым: логическому умножению, логическому сложению и логическому отрицанию.

Докажем методом сравнения таблиц истинности (табл.8 и 9), что операция импликации А → В равносильна логическому выражению $(\neg A) \vee B$.

Таблица 9. Таблица истинности логического выражения $(\neg A) \vee B$

A	*B*	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Таблицы истинности совпадают, что и требовалось доказать.

Логическое равенство (эквиваленция)[3]. Логическое равенство (эквиваленция) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «... тогда и только тогда, когда ...».

Логическая операция эквивалентности «А тогда и только тогда, когда *B*» обозначается $A \leftrightarrow B$[4] и выражается с помощью логической функции F_{10}, которая задается соответствующее таблицей истинности (табл. 10).

Таблица 10. Таблица истинности логической функции эквиваленции

A	*B*	F_{10}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Составное высказывание, образованное с помощью **логической операции эквиваленции** истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

Рассмотрим, например, два высказывания: *A* = «Компьютер может производить вычисления» и *B* = «Компьютер включен». Составное высказывание, полученное с помощью операции эквивалентности, истинно, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны:

«Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер включен».

«Компьютер не может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер не включен».

Составное высказывание, полученное с помощью операции эквивалентности, ложно,

---

[3] Более полную информацию об эквиваленции см. в Википедии (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D0%B2%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F)

[4] Другой вариант обозначения данной операции: ≡

когда одно высказывание истинно, а другое — ложно:

«Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер не включен».

«Компьютер не может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер включен».