Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Н. И. Шадрина, Н. Д. Берман

Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010

*Утверждено издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия*

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2016

УДК 681.518(076.5)
ББК 3973.2-018я7
Ш163

Рецензенты: кафедра математики и математических методов в экономике (ФГБОУ ВО «Хабаровский государственный университет экономики и права»); кандидат педагогических наук, доцент Н. А. Шулика (ФГБОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения». г. Хабаровск)

Научный редактор кандидат физико-математических наук, доцент Э. М. Вихтенко

Шадрина, Н. И.

Ш163 Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010 : учеб. пособие / Н. И. Шадрина, Н. Д. Берман ; [науч. ред. Э. М. Вихтенко]. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – 101 с.

ISBN 978-5-7389-1886-5

В учебном пособии рассматривается решение задач оптимизации с помощью инструмента Microsoft Excel 2010 «Поиск решения». Теоретический материал подкреплен практическими заданиями.

Для обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавриата и специалитета, которые изучают дисциплину «Информатика».

УДК 681.518(076.5)
ББК 3973.2-018я7

ISBN 978-5-7389-1886-5

Введение

Оптимизация – целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Оптимизация в широком смысле слова находит применение в науке, технике, экономике и других областях человеческой деятельности.

К оптимизационным задачам относятся, например:

- задачи оптимального планирования деятельности предприятий;
- задачи оптимального прикрепления потребителей к поставщикам (транспортная);
- задачи оптимального распределения трудовых ресурсов;
- задача оптимального составления смесей;
- бинарные задачи распределения;
- задачи о раскрое;
- задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг (инвестиционных проектов)
- и др.

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов. В качестве инструмента решения оптимизационных задач используется математическое программирование (планирование).

До второй половины XX века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись достаточно редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев и невозможно. С появлением компьютеров для решения таких задач используются специализированные пакеты прикладных программ, языки программирования высокого уровня.

Важное место в курсе информатики занимает раздел моделирования.

Применение математических моделей позволяет использовать средства вычислительной техники для анализа допустимых решений, поиска наиболее рационального оптимального решения.

В пособии рассматривается решение задач линейного и нелинейного программирования, а также возможности решения систем линейных алгебраических уравнений.

Основной целью учебного пособия является формирование навыков построения математических моделей некоторых оптимизационных задач, их решение с помощью инструмента Поиск решения табличного процессора MS Excel.

Поиск решения (в оригинале Excel Solver) является дополнительной надстройка табличного процессора MS Excel и используется с 1991 года. Разработчик программы Solver компания Frontline System специализируется на разработке мощных и удобных способов оптимизации, встроенных в среду популярных табличных процессоров разнообразных фирм-производителей (MS Excel Solver, Adobe Quattro Pro, Lotus 1-2-3).

Высокая эффективность их применения объясняется интеграцией программы оптимизации и табличного документа. Благодаря широкой популярности табличного процессора MS Excel встроенная в его среду программа Solver является наиболее распространенным инструментом для поиска оптимальных решений в сфере современного бизнеса.

1. Решение оптимизационных задач в MS Excel 2010

Общий алгоритм решения

Как отмечалось выше, в качестве инструмента решения оптимизационных задач используется математическое программирование.

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$, ($i= \overline{1, m}$), где f и g_i, заданные функции, а b_i – некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i, линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Для решения задач оптимизации в MS Excel 2010 используется инструмент Поиск решения.

Общий алгоритм решения оптимизационных задач в MS Excel 2010 следующий:

1. Составить математическую модель.
2. Ввести на рабочий лист Excel условия задачи:

а) создать таблицу на рабочем листе для ввода условий задачи;

б) ввести исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия.

3. Выполнить команду Данные → Анализ → Поиск решения.

4. Указать параметры в диалоговом окне Параметры поиска решения, выполнить решение.

5. Проанализировать полученные результаты.

Настройка доступа к инструменту Поиск решения

Доступ к инструменту Поиск решения осуществляется с помощью команды Данные → Анализ → Поиск решения (рис. 1.1).

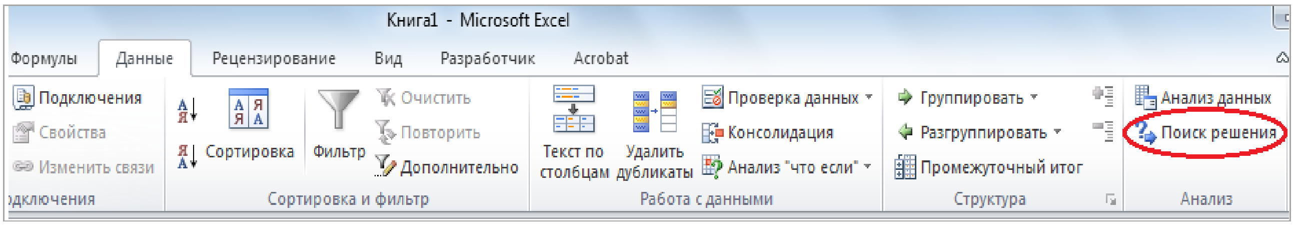


Рис. 1.1

Если команда Поиск решения или группа Анализ отсутствует на вкладке Данные, то необходимо загрузить соответствующую надстройку:

1. Выбрать команду Файл → Параметры.

2. В диалоговом окне Параметры Excel выбрать категорию Надстройки (рис. 1.2).

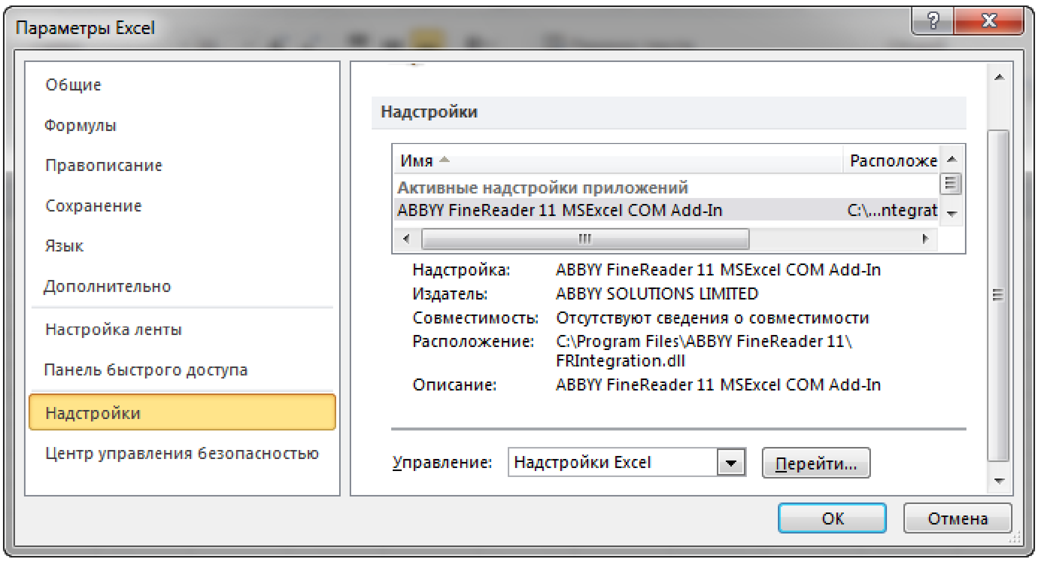


Рис. 1.2

3. В поле Управление выбрать значение Надстройки Excel, затем кнопку Перейти.

4. В поле Доступные надстройки установить флажок рядом с пунктом Поиск решения (рис. 1.3) и нажать кнопку ОК.

После выполнения этих действий команда Поиск решения будет доступной в группе команд Анализ вкладки Данные (рис. 1.1).

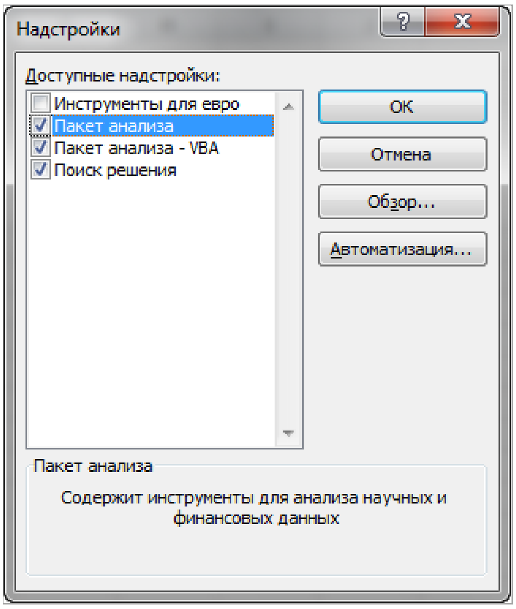


Рис. 1.3

Параметры инструмента Поиск решения

Как отмечалось ранее, доступ к инструменту Поиск решения осуществляется с помощью команды Данные → Анализ → Поиск решения. Данная команда отображает окно диалога Параметры поиска решения (рис. 1.4).

Перед использованием рассматриваемого инструмента на листе электронной таблицы должны быть сформированы целевая функция, область изменяемых ячеек (неизвестные), значения которых будут найдены в процессе решения. Решение (изменяемые ячейки) должно находиться в определенных пределах или удовлетворять определенным ограничениям.

Параметры задачи ограничиваются такими предельными показателями:

- количество неизвестных – 200;
- количество формульных ограничений на неизвестные – 100;
- количество предельных условий на неизвестные – 400.

В окне диалога Параметры поиска решения в поле Оптимизировать целевую функцию указывается адрес ячейки с целевой функцией. Целевая функция зависит от изменяемых ячеек и связана с ними некоторой формулой. Оптимизируется значение целевой функции до максимума, минимума, или некоторого определенного значения.

В поле Изменяя ячейки переменных указывается адрес блока ячеек, которые и будут решением.

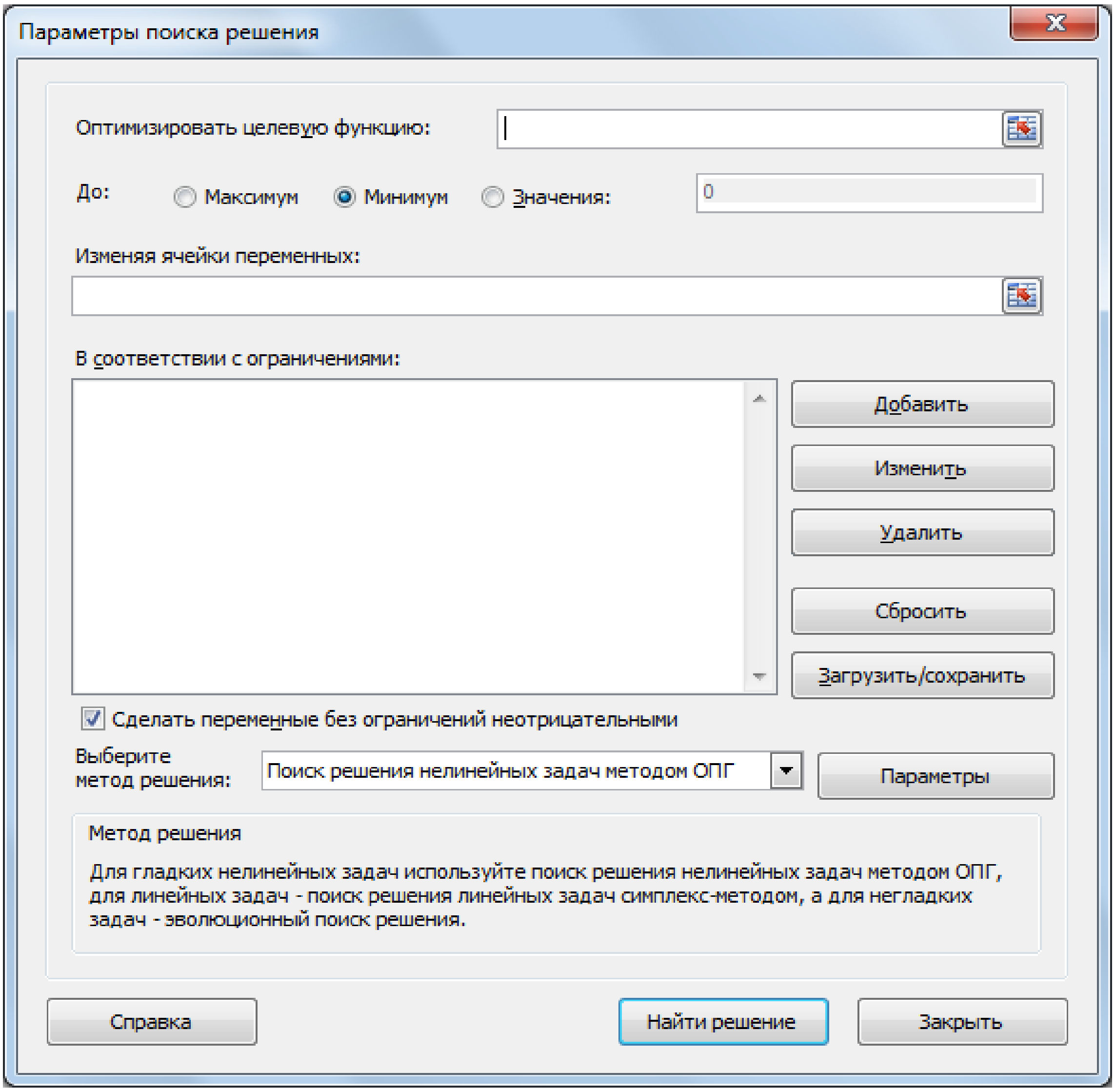


Рис. 1.4

В область В соответствии с ограничениями вводятся ограничения на решение. Кнопки Добавить, Изменить, Удалить управляют ограничениями, их действия интуитивно понятны.

Если в пределах одного рабочего листа Excel необходимо рассмотреть несколько моделей оптимизации (например, найти максимум и минимум одной функции или максимальные значения нескольких функций), то удобнее сохранить эти модели, используя кнопку Загрузить/сохранить. Диапазон для сохраняемой модели содержит информацию о целевой ячейке, об изменяемых ячейках, о каждом из ограничений и все значения окна диалога

Параметры. Выбор сохраненной ранее модели для решения конкретной оптимизационной задачи осуществляется также с помощью кнопки Загрузить/сохранить.

Флажок в поле Сделать переменные без ограничений неотрицательными позволяет не вводить дополнительно ограничения на изменяемые ячейки, если их значения неотрицательны.

Поиск решения в зависимости от типа решаемых задач, позволяет использовать методы:

- Симплексный метод.
- Метод ОПГ (обобщенного приведенного градиента).
- Эволюционный поиск решения.

Метод решения выбирается из раскрывающегося списка Выберите метод решения рассматриваемого окна диалога.

Кнопка Найти решение запускает процесс решения задачи.

Иногда в результате выполнения процедуры поиска решения само решение не находится, даже если известно, что решение существует. Часто эту проблему удается решить, изменив некоторые параметры и повторно запустив Поиск решения. Указанные параметры устанавливаются в диалоговом окне Параметры (рис. 1.5), которое отобразится, если в окне диалога Параметры поиска решения выбрать кнопку Параметры.

Ниже описаны основные параметры вкладки Все методы.

Точность ограничения. Указывает насколько точно выполняются ограничения. Задача может быть решена быстрее, если задать меньшую точность.

Использовать автоматическое масштабирование. Служит для автоматической нормализации входных и выходных значений, значительно различающихся по величине.

Показывать результаты итераций. Если этот параметр активизирован, то после выполнения очередной итерации решение приостанавливается, и отображаются найденные результаты.

Игнорировать целочисленные ограничения. При установке этого параметра игнорируются ограничения, определяющие, что значения должны быть целыми. Применение этого параметра иногда позволяет найти решение, которое в противном случае обнаружить нельзя.

Максимальное время. Предоставляет возможность ограничить максимальное время решения задачи (в секундах). Если появится сообщение, что время на решение задачи истекло, то его можно добавить.

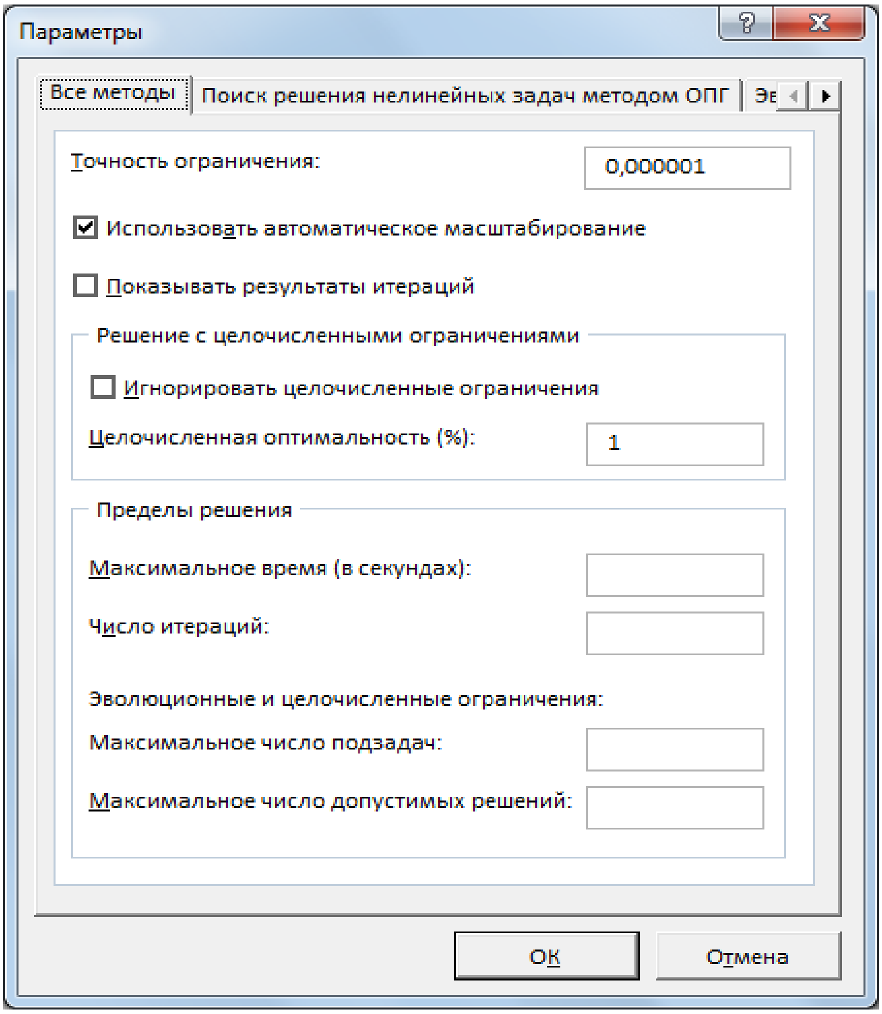


Рис. 1.5

Число итераций. Используется для ввода максимального числа промежуточных решений, допустимых при поиске решения.

Максимальное число подзадач. Параметр предназначен для решения сложных задач. Позволяет задать максимальное количество подзадач, которые могут использоваться при применении эволюционного алгоритма.

Максимальное число допустимых решений. Параметр предназначен для решения сложных задач. Позволяет задать максимальное количество приемлемых решений, которые могут использоваться при применении эволюционного алгоритма.

Две другие вкладки диалогового окна Параметры содержат дополнительные параметры, используемые методами обобщенного приведенного градиента и эволюционного поиска.

2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая постановка задачи

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \dots, k), \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = k+1, \dots, m), \tag{2.3}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, l, \qquad l \leq n), \tag{2.4}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \leq m$.

Функция (2.1) называется *целевой функцией* задачи, а условия (2.2)-(2.4) – *ограничениями* данной задачи. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, x_{3,\dots,} x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется *допустимым решением* (или *планом*). Решение $X^* = (\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \mathrm{x}_{3,}^*, \dots, \mathrm{x}_n^*)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Примеры решения задач линейного программирования

Задача определения оптимального ассортимента продукции

Предприятие изготавливает четыре вида продукции – A, B, C и D. Для производства продукции используются ресурсы – трудовые, материальные, финансовые. Максимальный запас ресурсов на производстве 800, 2000, 2900 соответственно. Расход ресурсов на единицу производства продукции

A, B, C и D и предельно допустимые значения выпуска каждого вида даны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Ресурсы	Расход ресурса на единицу продукции				Запас ресурса
	A	B	C	D	
Трудовые	8	3	4	4	800
Материальные	7	8	12	10	2000
Финансовые	15	14	13	14	2900
Нижняя граница выпуска	12		3		
Верхняя граница выпуска	30	25			

Прибыль от реализации единицы продукции равны: 8 д. е. – для A, 10 д. е. – для B, 7 д. е. – для C, 8 д. е. – для D.

Какой объем продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной?

Решение. Составим математическую модель для решения поставленной задачи.

Обозначим переменные:

x_1 – объем произведенной продукции вида A;

x_2 – объем произведенной продукции вида B;

x_3 – объем произведенной продукции вида C;

x_4 – объем произведенной продукции вида D;

Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия ресурсами и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что объем изготовляемой продукции не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 14x_4 \le 2900, \\ 12 \le x_1 \le 30, \\ 0 \le x_2 \le 25, \\ x_3 \ge 3, \\ x_4 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Прибыль от реализации продукции составит:

$$F = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4 \tag{2.6}$$

Среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств (2.5) требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение F_{max}.

Рассматриваемая задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции, затраты станочного времени и др.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 2.1). Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					**Прибыль (целевая функция)**	
4	Прибыль от реализации продукции						
5							
6		**Ограничения**					
7		Расход ресурса на единицу продукции				**Ограничения по ресурсам**	**Запас ресурса**
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые						
10	Материальные						
11	Финансовые						
12	Нижняя граница выпуска						
13	Верхняя граница выпуска						

Рис. 2.1

Заполним таблицу.

Блок ячеек B3:E3 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи.

Блок ячеек B4:E4 содержит значения прибыли от реализации продукции. В ячейках B9: E13 отображен расход ресурсов на единицу производства продукции A, B, C и D и предельно допустимые значения выпуска каждого вида.

Для вычисления целевой функции в ячейке F4 используем функцию =СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4) (рис. 2.2).

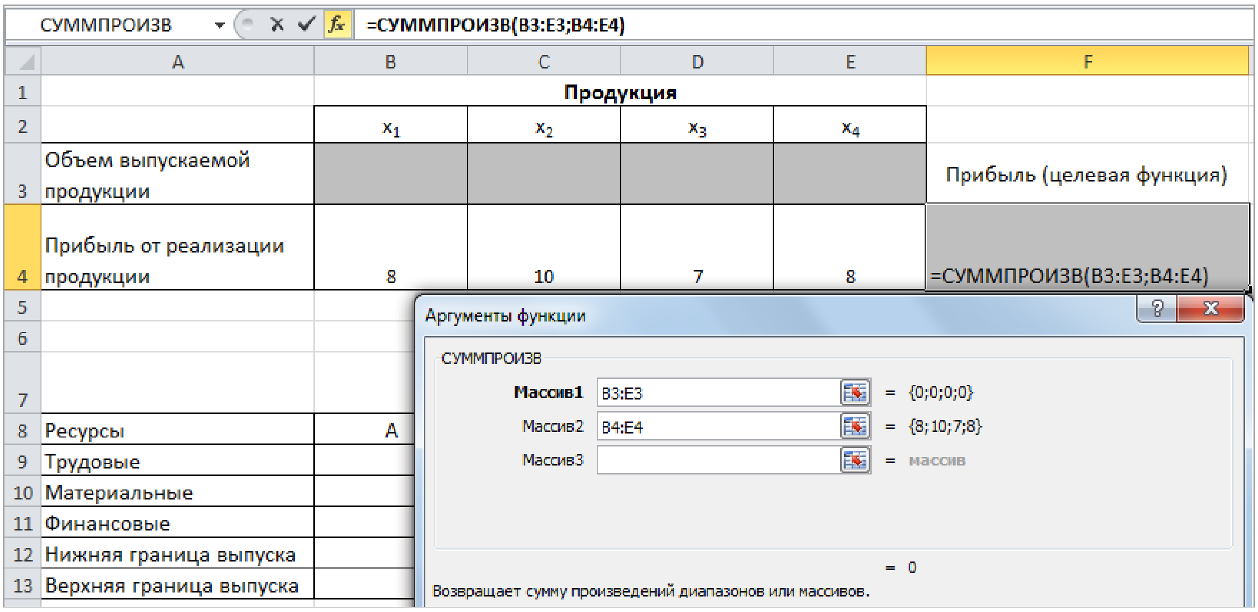


Рис. 2.2

В ячейки F9:F11 введены формулы для расчета ограничений по ресурсам. На рис. 2.3 представлена таблица с исходными данными, целевой функцией, ограничениями и граничными условиями.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					**Прибыль (целевая функция)**	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	8	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)	
5							
6		**Ограничения**					
7		Расход ресурса на единицу продукции				**Ограничения по ресурсам**	**Запас ресурса**
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые	8	3	4	4	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B9:E9)	800
10	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B10:E10)	2000
11	Финансовые	15	14	13	14	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B11:E11)	2900
12	Нижняя граница выпуска	12		3			
13	Верхняя граница выпуска	30	25				

Рис. 2.3

На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры (рис. 2.4):

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – F4;
- выбираем нахождение максимума целевой функции;

- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B3:E3;
- в области В соответствии с ограничениями с помощью кнопки Добавить размещаем все ограничения задачи (добавление ограничений будет рассмотрено ниже);
- установим флажок в поле Сделать переменные без ограничений неотрицательными;
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом;
- нажимаем кнопку Найти решение.

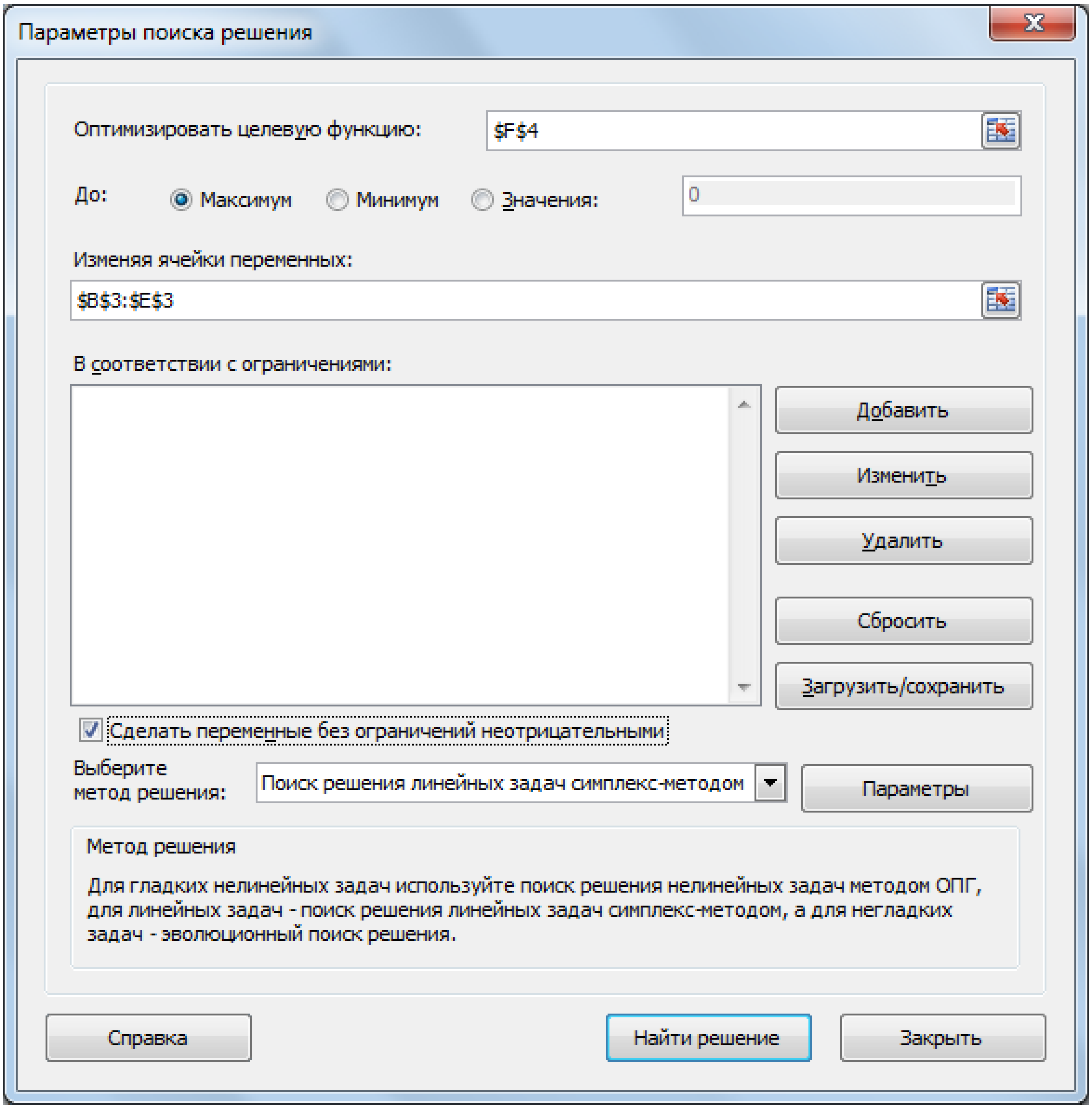


Рис. 2.4

Остановимся подробно на добавлении ограничений в область В соответствии с ограничениями.

Все ограничения указаны в системе (2.5). Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку Добавить. Отобразится окно диалога Добавление ограничений.

Добавляем ограничения для неравенств:

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_2 + 4x_2 \leq 800$$
$$7x_1 + 8x_2 + 12x_2 + 10x_2 \leq 2000$$
$$15x_1 + 14 + 13x_2 + 14x_2 \leq 2900$$

В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона F9:F11, выбираем в раскрывающемся списке знак неравенства ≤, в поле Ограничение выделяем диапазон G9:G11 и нажимаем кнопку Добавить (рис. 2.5). Результатом этого действия будет добавление текущего ограничения в список ограничений, поля окна Добавление ограничения будут очищены для ввода следующего ограничения.

Порядок ввода ограничений не имеет значения. Главное — не забыть ни одно из ограничений.

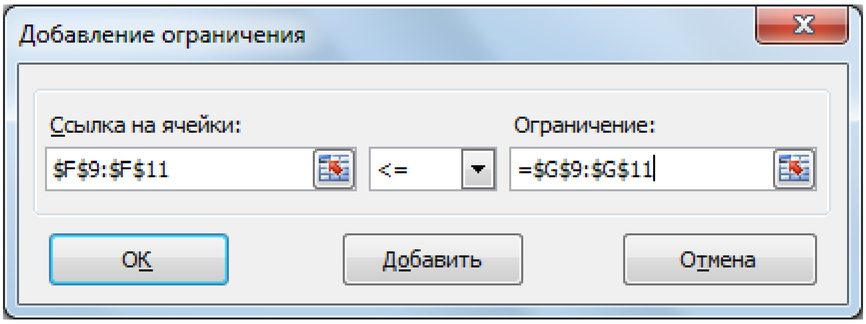


Рис. 2.5

Покажем окна для добавления остальных ограничений.

$12 \leq x_1 \leq 30$ (рис. 2.6, 2.7).

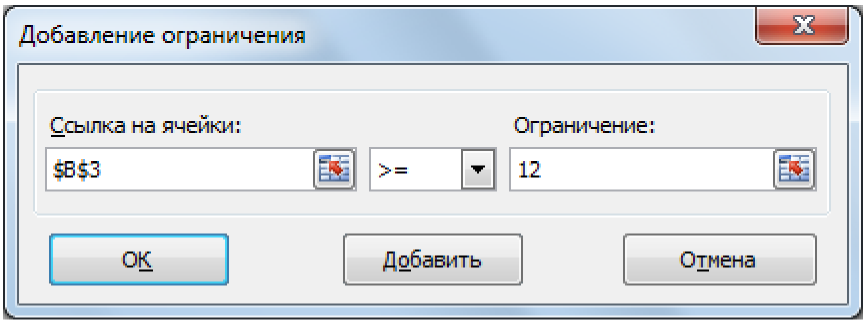


Рис. 2.6

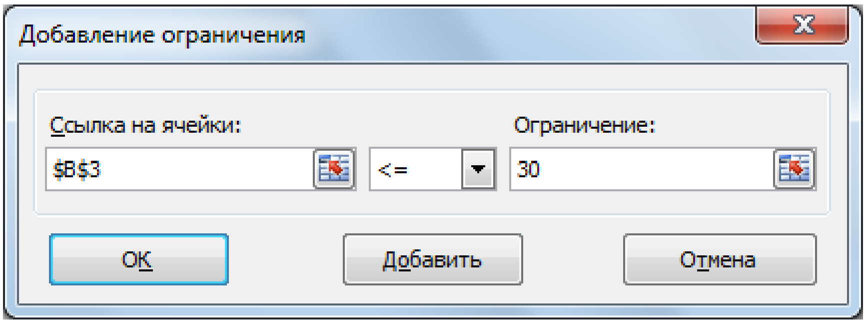


Рис. 2.7

$x_2 \le 25$ (рис. 2.8).

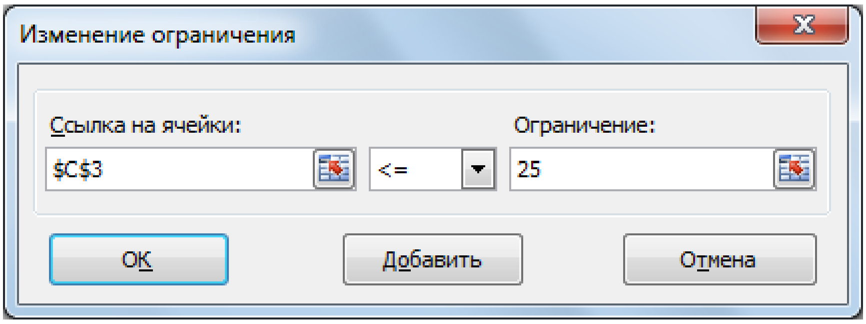


Рис. 2.8

$x_3 \ge 3$ (рис. 2.9).

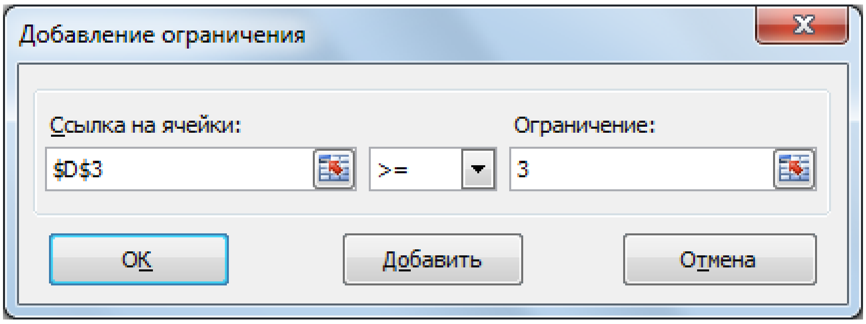


Рис. 2.9

Ограничения $x_2 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$ можно не добавлять, т.к. в окне Параметры поиска решения установлен флажок в поле Сделать переменные без ограничений неотрицательными.

Для принятия последнего ограничения и возврата к диалоговому окну Параметры поиска решения нажмем кнопку ОК.

После указания всех необходимых параметров в диалоговое окно Параметры поиска решения примет вид (рис. 2.10):

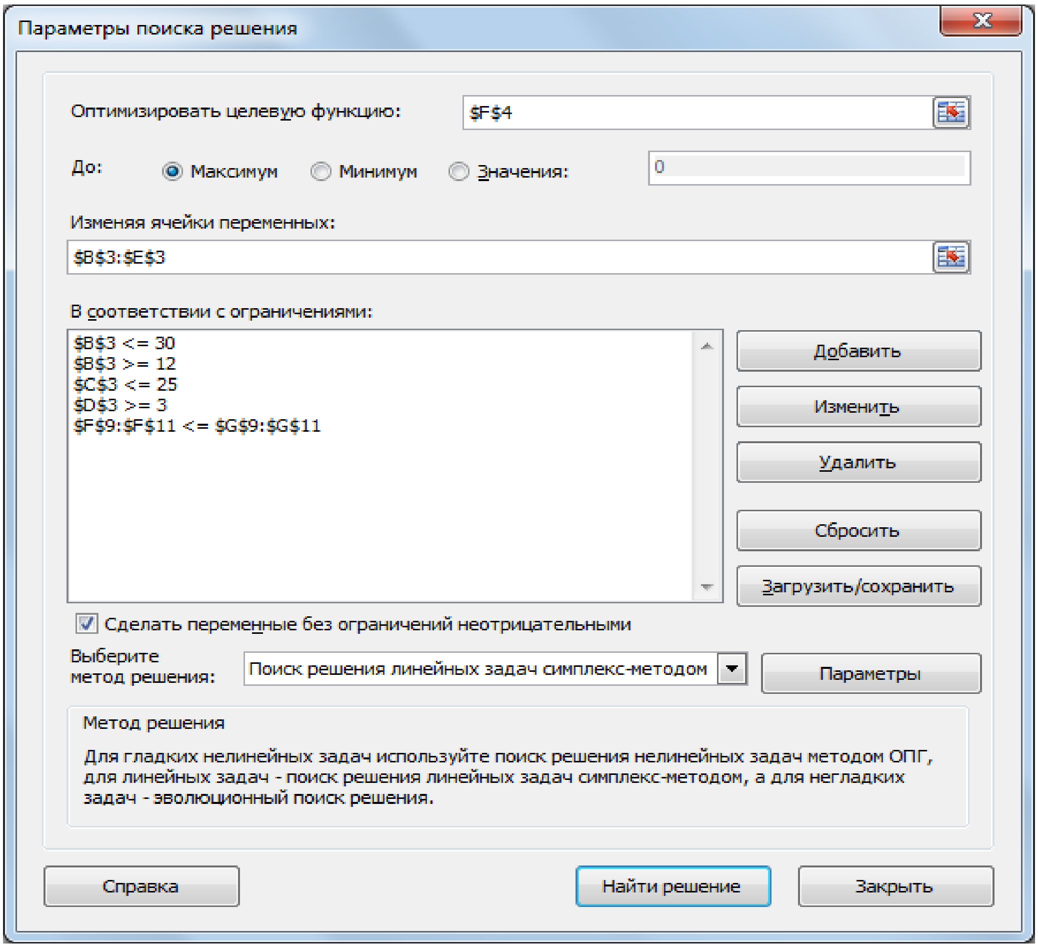


Рис. 2.10

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.11).

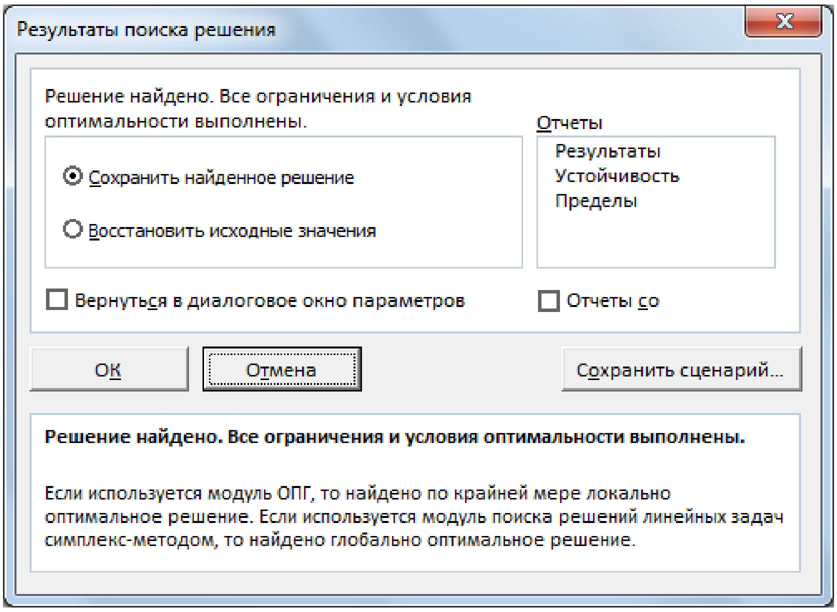


Рис. 2.11

Для сохранения полученного решения необходимо установить переключатель Сохранить найденное решение и нажать кнопку ОК. После чего на рабочем листе отобразится решение задачи (рис. 2.12).

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Продукция**					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции	12,00	25,00	3,00	154,25	Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	8	1601	
5							
6		**Ограничения**					
7		Расход ресурса на единицу продукции				**Ограничения по ресурсам**	**Запас ресурса**
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые	8	3	4	4	800,0	800
10	Материальные	7	8	12	10	1862,5	2000
11	Финансовые	15	14	13	14	2728,5	2900
12	Нижняя граница выпуска	12		3			
13	Верхняя граница выпуска	30	25				

Рис. 2.12

Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 1601 д. е. при следующем плане производства:

12,00 – объем продукции типа А;

25,00 – объем продукции типа В;

3,00 – объем продукции типа С;

124,25– объем продукции типа D;

Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки, Поиск решения позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: Результаты, Устойчивость и Пределы. Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога Результаты поиска решения (рис. 2.11). Для выбора нескольких отчетов из списка использовать клавишу Shift.

Рассмотрим более подробно каждый из них.

Отчет по результатам (рис. 2.13) содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления и окончательное значение, во второй – значения искомых переменных: исходные и полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как состояние и допуск. Состояние принимает значение «Привязка», если вводимые ограничения совпадают с ограничениями, полученными в результате вычислений, и значение «Без привязки» в противном случае.

По значениям столбца Допуск можно сделать вывод о недоиспользованных ресурсах. В рассматриваемой задаче трудовые ресурсы были использованы полностью (значение в столбце Допуск равно 0), материальные ресурсы использованы не полностью (недоиспользованными оказались 137,5 единиц), также недоиспользовано 171,5 ед. финансовых ресурсов.

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [Поиск решения.xlsx]Решение
Отчет создан: 28.11.2015 23:22:17
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,016 секунд.
Число итераций: 4 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$F$4	Прибыль от реализации продукции Прибыль (целевая функция)	0	1601

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$3	Объем выпускаемой продукции x1	0,00	12,00	Продолжить
$C$3	Объем выпускаемой продукции x2	0,00	25,00	Продолжить
$D$3	Объем выпускаемой продукции x3	0,00	3,00	Продолжить
$E$3	Объем выпускаемой продукции x4	0,00	154,25	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$F$9	Трудовые Ограничения по ресурсам	800,0	$F$9<=$G$9	Привязка	0
$F$10	Материальные Ограничения по ресурсам	1862,5	$F$10<=$G$10	Без привязки	137,5
$F$11	Финансовые Ограничения по ресурсам	2728,5	$F$11<=$G$11	Без привязки	171,5
$B$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	$B$3<=30	Без привязки	18
$B$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	$B$3>=12	Привязка	0,00
$C$3	Объем выпускаемой продукции x2	25,00	$C$3<=25	Привязка	0
$D$3	Объем выпускаемой продукции x3	3,00	$D$3>=3	Привязка	0,00
$E$3	Объем выпускаемой продукции x4	154,25	$E$3>=0	Без привязки	154,25

Рис. 2.13

Отчет по устойчивости (рис. 2.14) содержит два блока: Ячейки переменных и Ограничения. Первый блок содержит информацию по допустимому увеличению и уменьшению коэффициентов целевой функции при условии, что объем оптимальной продукции не изменится. Второй блок касается увеличения и уменьшения значений ограничений.

Отчет по пределам (рис. 2.15) содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Поик решения.xlsx]Решение
Отчет создан: 29.11.2015 12:15:28

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Объем выпускаемой продукции x1	12	-8	8	8	1E+30
$C$3	Объем выпускаемой продукции x2	25	4	10	1E+30	4
$D$3	Объем выпускаемой продукции x3	3	-1	7	1	1E+30
$E$3	Объем выпускаемой продукции x4	154,25	0	8	5,333333333	1

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$9	Трудовые Ограничения по ресурсам	800	2	800	49	617
$F$10	Материальные Ограничения по ресурсам	1862,5	0	2000	1E+30	137,5
$F$11	Финансовые Ограничения по ресурсам	2728,5	0	2900	1E+30	171,5

Рис. 2.14

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [Поик решения.xlsx]Решение
Отчет создан: 29.11.2015 13:36:00

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$F$4	Прибыль от р	1601

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$3	Объем выпус	12,00	12,00	1601,00	12,00	1601,00
$C$3	Объем выпус	25,00	0,00	1351,00	25,00	1601,00
$D$3	Объем выпус	3,00	3,00	1601,00	3,00	1601,00
$E$3	Объем выпус	154,25	0,00	367,00	154,25	1601,00

Рис. 2.15

При сохранении книги Excel после выполнения поиска решения все значения, введенные в окнах диалога Поиск решения, сохраняются вместе с данными рабочего листа. С каждым рабочим листом в рабочей книге можно сохранить один набор значений параметров Поиска решения.

Кнопка Сохранить сценарий окна Результаты поиска решения (рис. 2.11) позволяет сохранить сценарий текущей модели. Все сценарии доступны в Диспетчере сценариев, который открывается командой Данные → Работа с данными →Анализ что-если → Диспетчер сценариев.

Задача проверки сбалансированности плана

Рассмотрим решение предыдущей задачи при измененных условиях. Предположим при сложившейся ситуации на рынке продукцию вида D сняли с производства и взамен планируется выпуск продукции вида E. Поменялись предельно допустимые значения выпуска некоторых видов. Все исходные данные по расходу, запасам ресурсов, предельно допустимым значениям выпуска каждого вида даны в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Ресурсы	Расход ресурса на единицу продукции				Запас ресурса
	A	B	C	E	
Трудовые	8	3	4	2	800
Материальные	7	8	12	10	2000
Финансовые	15	14	13	12	2900
Нижняя граница выпуска	10	3	7	185	
Верхняя граница выпуска	–	–	–	–	

Прибыль от реализации единицы продукции равны: 8 д. е. – для A, 10 д. е. – для B, 7 д. е. – для C, 12 д. е. – для E.

Необходимо определить объем продукции каждого вида, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

Решение. Составим математическую модель для решения поставленной задачи.

Обозначим переменные:

x_1 – объем произведенной продукции вида A;

x_2 – объем произведенной продукции вида B;

x_3 – объем произведенной продукции вида C;

x_4 – объем произведенной продукции вида E.

Прибыль от реализации продукции составит:

$$F = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 \tag{2.7}$$

Ограничения для переменных:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 12x_4 \leq 2900, \\ x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 3, \\ x_3 \geq 7, \\ x_4 \geq 185. \end{cases} \tag{2.8}$$

Математическая постановка данной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных уравнений (2.8), при котором целевая функция F принимает максимальное значение.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных. Введем в созданную таблицу исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия (рис. 2.16).

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Продукция**					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	12		
5							
6		**Ограничения**					
7		Расход ресурса на единицу продукции				**Ограничения по ресурсам**	**Запас ресурса**
8	Ресурсы	A	B	C	E		
9	Трудовые	8	3	4	2	0,0	800
10	Материальные	7	8	12	10	0,0	2000
11	Финансовые	15	14	13	12	0,0	2900
12	Нижняя граница выпуска	10	3	7	185		
13	Верхняя граница выпуска	-	-	-	-		

Рис. 2.16

В формульном варианте таблица будет иметь вид (рис. 2.17):

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					**Прибыль (целевая функция)**	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	12	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)	
5							
6		**Ограничения**					
7		Расход ресурса на единицу продукции				**Ограничения по ресурсам**	**Запас ресурса**
8	Ресурсы	A	B	C	E		
9	Трудовые	8	3	4	2	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B9:E9)	800
10	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B10:E10)	2000
11	Финансовые	15	14	13	12	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B11:E11)	2900
12	Нижняя граница выпуска	10	3	7	185		
13	Верхняя граница выпуска	-	-	-	-		

Рис. 2.17

На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим необходимые параметры (рис. 2.18):

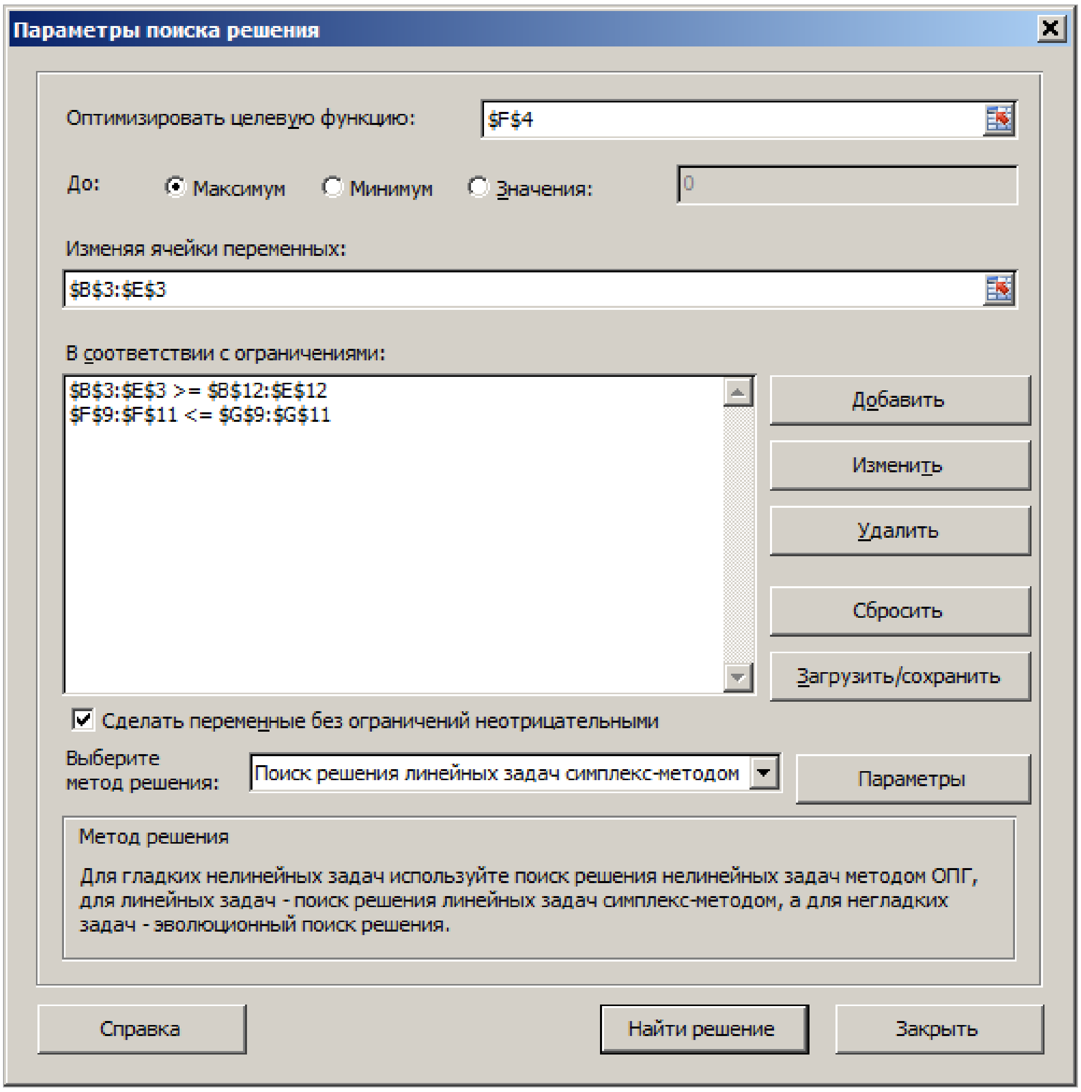


Рис. 2.18

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.19).

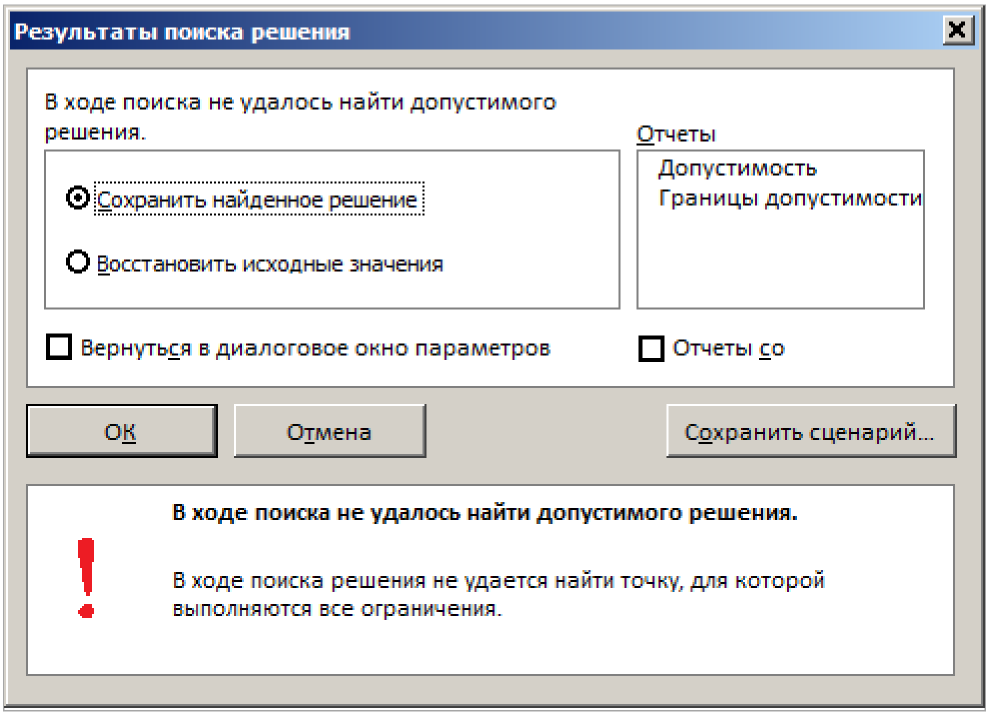


Рис. 2.19

В данном окне дано сообщение, что в результате решения данной задачи не удалось найти допустимого решения. Выведем отчет о допустимости (рис 2.20).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 14.0 Отчет о допустимости**						
2	**Лист: [Поик решения.xlsx]Едобавили (2)**						
3	**Отчет создан: 06.03.2016 20:36:56**						
4							
5							
6	Ограничения, препятствующие существованию допустимого решения задачи						
7		**Ячейка**	**Имя**	**Значение ячейки**	**Формула**	**Состояние**	**Допуск**
8		$F$10	Материальные Ограничения по ресурсам	2028,0	$F$10<=$G$10	Нарушены	-28
9		$B$3	Объем выпускаемой продукции x1	10,00	$B$3>=$B$12	Привязка	0
10		$C$3	Объем выпускаемой продукции x2	3,00	$C$3>=$C$12	Привязка	0
11		$D$3	Объем выпускаемой продукции x3	7,00	$D$3>=$D$12	Привязка	0
12		$E$3	Объем выпускаемой продукции x4	185,00	$E$3>=$E$12	Привязка	0

Рис. 2.20

По отчету о допустимости делаем вывод, что задача не сбалансирована по материальным ресурсам. Действительно, если подставим нижние границы выпуска продукции во второе уравнение системы (2.8), то материальных ресурсов для выполнения плана не хватит:

$$7 \cdot 10 + 8 \cdot 3 + 12 \cdot 7 + 10 \cdot 185 = 2028$$

(запас материальных ресурсов по условию задачи равен 2000 ед.). Поэтому мы и не получили оптимального решения.

При постановке задачи определения оптимального ассортимента продукции до получения ее решения неизвестно, сбалансирована она или нет. В этом случае есть смысл составить модель с учетом возможной нехватки ресурсов.

Введем новые переменные:

d_1 – объем дополнительных трудовых ресурсов;

d_2 – объем дополнительных материальных ресурсов;

d_3 – объем дополнительных финансовых ресурсов.

Дополнительные ресурсы необходимы для выполнения скорректированного плана производства.

Теперь задача сводится к минимизации целевой функции L.

$$L = d_1 + d_2 + d_3 \tag{2.9}$$

Предприятие заинтересовано в получаемой прибыли. Поэтому включим ее желаемое значение в систему ограничений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 \geq 2300 \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - d_1 \leq 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 - d_2 \leq 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 12x_4 - d_3 \leq 2900, \\ x_1 \geq 10, x_2 \geq 3, x_3 \geq 7, x_4 \geq 185 \\ d_1 \geq 0, \ \ d_2 \geq, \ \ d_3 \geq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Математическая постановка скорректированной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных неравенств (2.10), при котором целевая функция L (2.9) принимает минимальное значение.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных. Введем в созданную таблицу исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия (рис. 2.21).

Диапазон ячеек B3:E3;G9:G11 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи.

Блок ячеек B4:E4 содержит значения прибыли от реализации продукции. В ячейках B9: E13 отображен расход ресурсов на единицу производства продукции A, B, C и E и предельно допустимые значения выпуска каждого вида.

Для вычисления прибыли в ячейке F4 используем функцию =СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4). В ячейки F9:F11 введены формулы для расчета ограничений по ресурсам.

Целевая функция находится в ячейке G14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Продукция							
2		x_1	x_2	x_3	x_4				
3	Объем выпускаемой продукции					Прибыль			
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	12	0			
5									
6		Ограничения							
7		Расход ресурса на единицу продукции				Ограничения по ресурсам	Дополнительные ресурсы	Ограничения с учетом дополнительных ресурсов	Запас ресурса
8	Ресурсы	A	B	C	E				
9	Трудовые	8	3	4	2	0,0		0,0	800
10	Материальные	7	8	12	10	0,0		0,0	2000
11	Финансовые	15	14	13	12	0,0		0,0	2900
12	Нижняя граница выпуска	10	3	7	185				
13	Верхняя граница выпуска	-	-	-	-		Суммарные дополнительные ресурсы (целевая функция)		
14							0		

Рис. 2.21

В формульном варианте таблица будет иметь вид (рис. 2.22):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Продукция							
2		x_1	x_2	x_3	x_4				
3	Объем выпускаемой продукции					Прибыль			
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	12	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)			
5									
6		Ограничения							
7		асход ресурса на единицу продукци				Ограничения по ресурсам	Дополнительные ресурсы	Ограничения с учетом дополнительных ресурсов	Запас ресурса
8	Ресурсы	A	B	C	E				
9	Трудовые	8	3	4	2	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B9:E9)		=F9-G9	800
10	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B10:E10)		=F10-G10	2000
11	Финансовые	15	14	13	12	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B11:E11)		=F11-G11	2900
12	Нижняя граница выпуска	10	3	7	185				
13	Верхняя граница выпуска	-	-	-	-		Суммарные дополнительные ресурсы (целевая функция)		
14							=СУММ(G9:G11)		

Рис. 2.22

На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим необходимые параметры (рис. 2.23) для решения задачи.

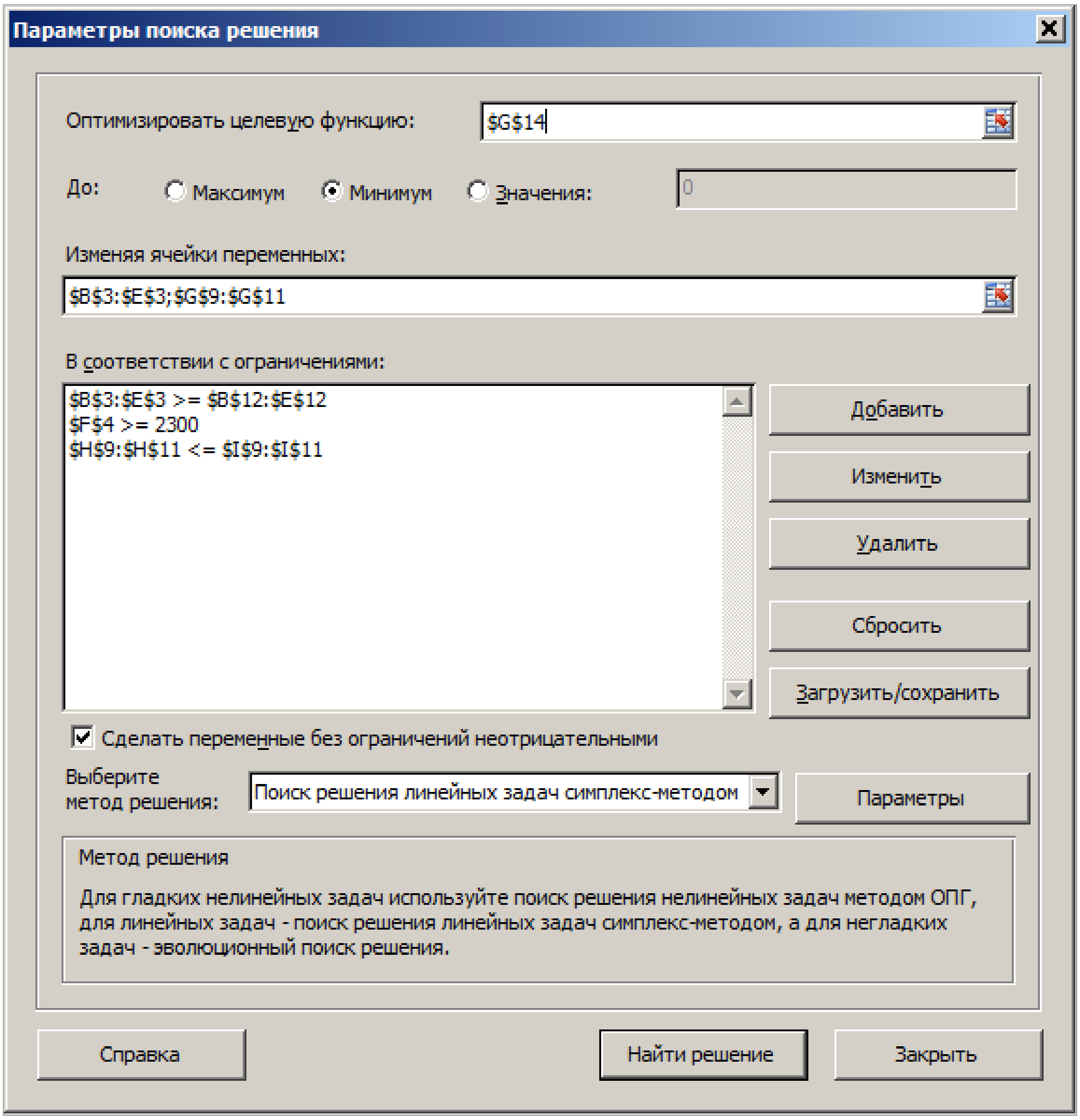


Рис. 2.23

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.24). В данном окне дано сообщение, что решение найдено.

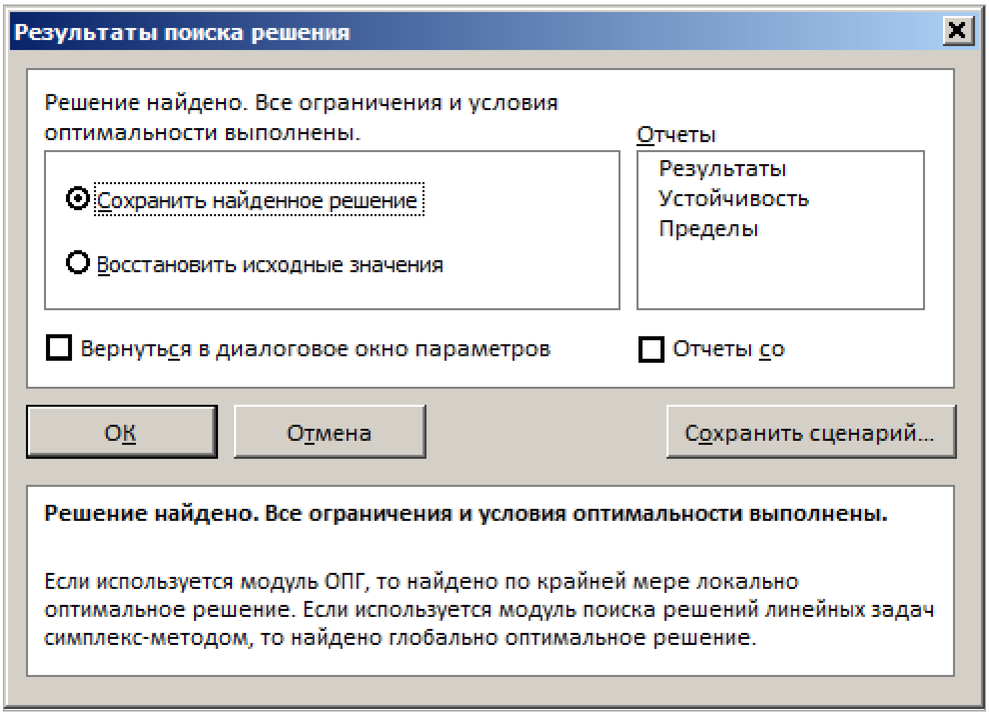


Рис. 2.24

Для сохранения полученного решения необходимо установить переключатель Сохранить найденное решение и нажать кнопку ОК. После чего на рабочем листе отобразится решение задачи (рис. 2.25).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Продукция							
2		x_1	x_2	x_3	x_4				
3	Объем выпускаемой продукции	10,00	3,00	7,00	185,00	Прибыль			
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	12	2379			
5									
6		Ограничения							
7		Расход ресурса на единицу продукции				Ограничения по ресурсам	Дополнительные ресурсы	Ограничения с учетом дополнительных ресурсов	Запас ресурса
8	Ресурсы	A	B	C	E				
9	Трудовые	8	3	4	2	487,0	0,0	487,0	800
10	Материальные	7	8	12	10	2028,0	28,0	2000,0	2000
11	Финансовые	15	14	13	12	2503,0	0,0	2503,0	2900
12	Нижняя граница выпуска	10	3	7	185				
13	Верхняя граница выпуска	-	-	-	-		Суммарные дополнительные ресурсы (целевая функция)		
14							28		

Рис. 2.25

Результаты решения данной задачи показывают какого вида и сколько ресурсов потребуется для обеспечения выполнения скорректированного плана. Вся продукция выпускается на нижней границе. Трудовых и финансовых ресурсов достаточно для выполнения плана. Для материальных ресурсов требуется восполнение в объеме 28 единиц. Прибыль составит 2379 денежных единиц.

Решение несбалансированной задачи, конечно, не заменило дополнительных ресурсов, но показало, что нужно для сбалансированного плана.

Транспортная задача

Математическая постановка задачи

Транспортная задача относится к специальным задачам линейного программирования.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_m$, в n пунктов назначения $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, B_n$.

При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i – запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j – потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (2.11)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \ b_j \ (j = 1, \dots, n), \qquad (2.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, \dots, m), \qquad (2.13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n). \qquad (2.14)$$

Функция (2.11) называется *целевой функцией* задачи. Поскольку переменные x_{ij} удовлетворяют системам линейных уравнений (2.12) и (2.13) и условию неотрицательности (2.14), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки. План $X^* = \left(x_{ij}^*\right)(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$, при котором функция (2.11) принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, то есть выполняется равенство (2.15), то модель такой транспортной задачи называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется открытой.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ , \tag{2.15}$$

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, то есть чтобы выполнялось равенство (2.15).

В случае превышения запаса над потребностью, то есть при неравенстве:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\ ,$$

вводят фиктивный (i + 1)-й пункт назначения с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\ ,$$

и соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$$c_{in+1} = 0\ (i = 1, \dots, m).$$

Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (2.15).

Аналогично, при выполнении неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\ ,$$

вводят фиктивный (m + 1)-й пункт отправления с запасом груза

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

и соответствующие тарифы полагают равными нулю:

$$c_{m+1j} = 0 \ (j = 1, \ldots, n).$$

Этим задача с водится к транспортной задаче с закрытой моделью.

Пример решения транспортной задачи

Задача определения оптимального плана перевозок

На трех мукомольных предприятиях A, B, C ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами I, II, III, IV, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с мукомольных предприятий на хлебозаводы задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Обозначим переменные:

x_{ij} – количество муки, перевозимое с i-го мукомольного предприятия в j-й хлебозавод (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4).

c_{ij} – тариф перевозки 1 т муки с i-го мукомольного предприятия в j-й хлебозавод (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4).

a_i – объем производства на i-м мукомольном предприятии(i = 1, 2, 3).

b_j – объем потребление в j-м хлебозаводе (j = 1, 2, 3, 4).

Модель рассматриваемой транспортной задачи является закрытой, т. к.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$$

(110 + 190 + 90 =80 + 60 + 170 + 80).

Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося количества муки обеспечивается за счет выполнения следующих соглашений:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.16}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.18}$$

При этом общая стоимость перевозок составит:

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \tag{2.19}$$

Таким образом, математическая постановка данной транспортной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных уравнений (2.16) – (2.17), при котором целевая функция F принимает минимальное значение.

Системы (2.16) – (2.17) с учетом исходных данных можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90 \end{gathered}$$

Целевая функция F при этом имеет вид:

$F = 8x_{11} + x_{12} + 9x_{13} + 7x_{14} + 4x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 12x_{24} + 3x_{31} +$
$+5x_{32} + +8x_{33} + 9x_{34}$.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 2.26). Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Тарифы перевозок 1 т муки**						
2	Мукомольные предприятия	Хлебозаводы					
3		I	II	III	IV		
4	А						
5	В						
6	С						
7	**Объемы перевозок**						
8		I	II	III	IV	Суммарный план перевозки из пунктов производства	Объемы производства
9	А						
10	В						
11	С						
12	Суммарный план перевозки в пункты потребления						
13	Объемы потребления						
14							
15	**Общая стоимость перевозок (целевая функция)**						

Рис. 2.26

Заполним таблицу.

Блок ячеек B4:E6 содержит тарифы перевозок.

Блок ячеек G9:G11 содержит данные объема производства мукомольных предприятий.

Блок ячеек B13:E13 содержит данные объема потребления хлебозаводов.

Блок ячеек B9:E11 будет содержать оптимальный план доставки муки. Значения этих ячеек вычисляется в процессе решения задачи.

Введем необходимые формулы согласно составленной модели задачи.

В ячейки B12:E12 суммарные планы перевозки в пункты потребления.

В ячейки F9:F11 суммарные планы перевозки из пунктов производства.

В ячейку B15 введем формулу для целевой функции $F = 8x_{11} + x_{12} + +9x_{13} + 7x_{14} + 4x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 12x_{24} + 3x_{31} + +5x_{32} + 8x_{33} + 9x_{34}$. Для этого используем функцию =СУММПРОИЗВ().

На рис. 2.27 показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Тарифы перевозок 1 т муки**						
2	Мукомольные предприятия	Хлебозаводы					
3		I	II	III	IV		
4	A	8	1	9	7		
5	B	4	6	2	12		
6	C	3	5	8	9		
7	**Объемы перевозок**						
8		I	II	III	IV	Суммарный план перевозки из пунктов производства	Объемы производства
9	A					=СУММ(B9:E9)	110
10	B					=СУММ(B10:E10)	190
11	C					=СУММ(B11:E11)	90
12	Суммарный план перевозки в пункты потребления	=СУММ(B9:B11)	=СУММ(C9:C11)	=СУММ(D9:D11)	=СУММ(E9:E11)		
13	Объемы потребления	80	60	170	80		
14							
15	**Общая стоимость перевозок (целевая функция)**	=СУММПРОИЗВ(B4:E6;B9:E11)					

Рис. 2.27

Теперь для решения транспортной задачи подключаем инструмент MS Excel 2010 Поиск решения. Для этого на вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры (рис. 2.28):

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – B15;
- выбираем нахождение минимума целевой функции;
- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B9:E11;
- устанавливаем флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными;
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом;

Введем ограничения в диалоговое окно Параметры поиска решения.

Все ограничения указаны в условиях (2.16) – (2.18). Для добавления ограничений необходимо выбрать кнопку Добавить. Отобразится окно диалога Добавление ограничений.

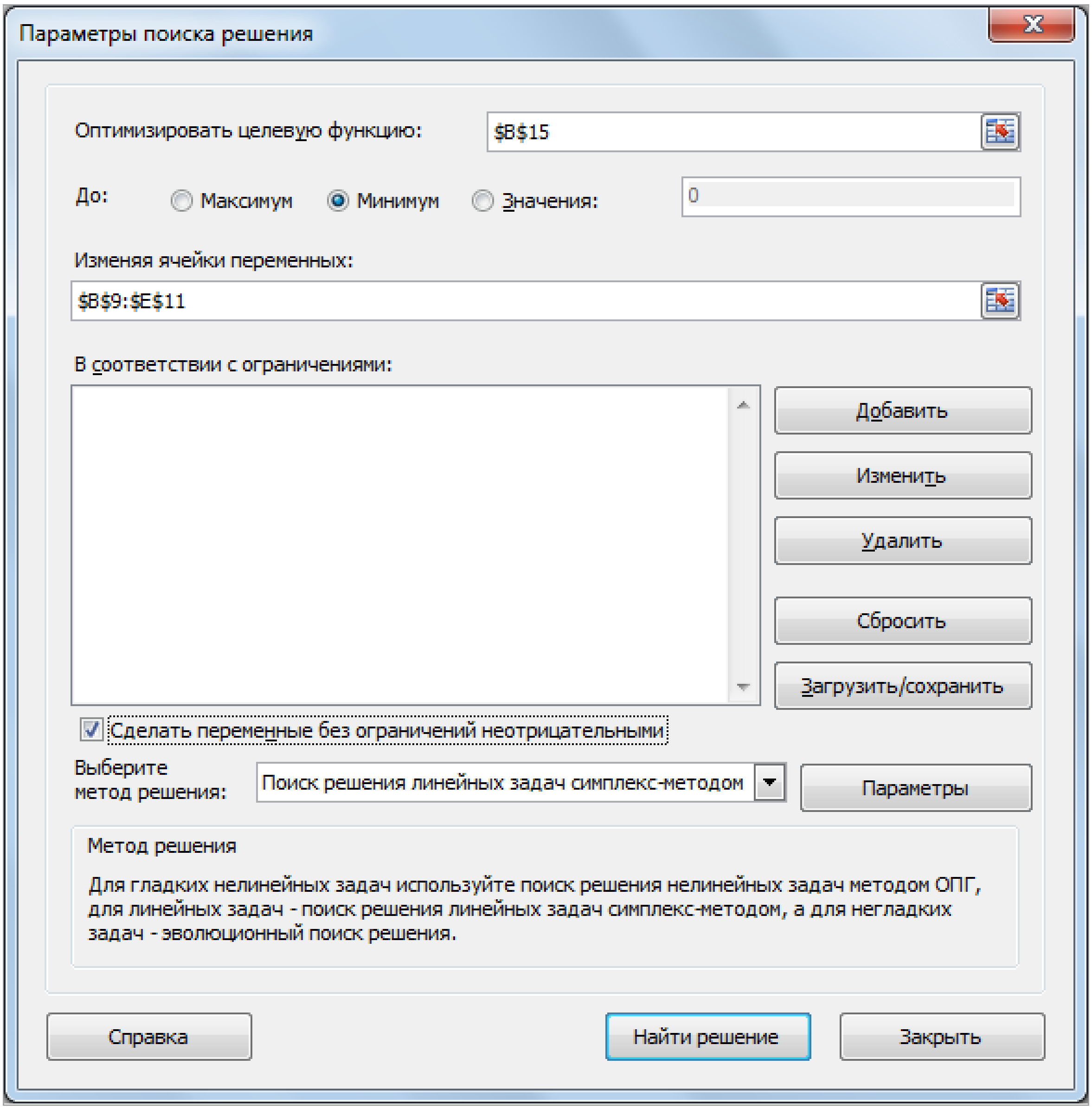


Рис. 2.28

Добавляем ограничения для системы (2.16):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80$$

В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона B12:E12, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле Ограничение выделяем диапазон B13:E13 и нажимаем кнопку Добавить (рис. 2.29). Ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна Добавление ограничения будут очищены для ввода следующего ограничения.

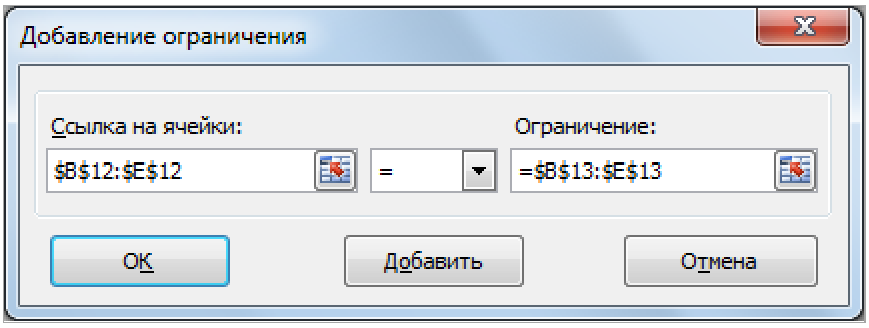


Рис. 2.29

Добавляем ограничения для системы(2.17):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90$$

В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона F9:F11, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле Ограничение выделяем диапазон G9:G11 и нажимаем кнопку ОК (рис. 25).

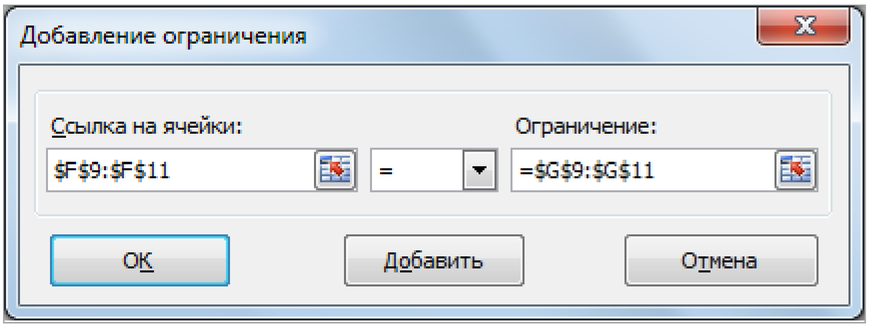


Рис. 2.30

В результате будет принято последнее ограничение и возврат к диалоговому окну Параметры поиска решения (2.31).

У нас в области В соответствии с ограничениями не введены ограничения (2.18) о неотрицательности искомых переменных. Это сделано сознательно, т.к. ранее в окне Параметры поиска решения установлен флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными. Это позволило выполнить условия $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4$

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.32). В данном окне дано сообщение, что решение найдено.

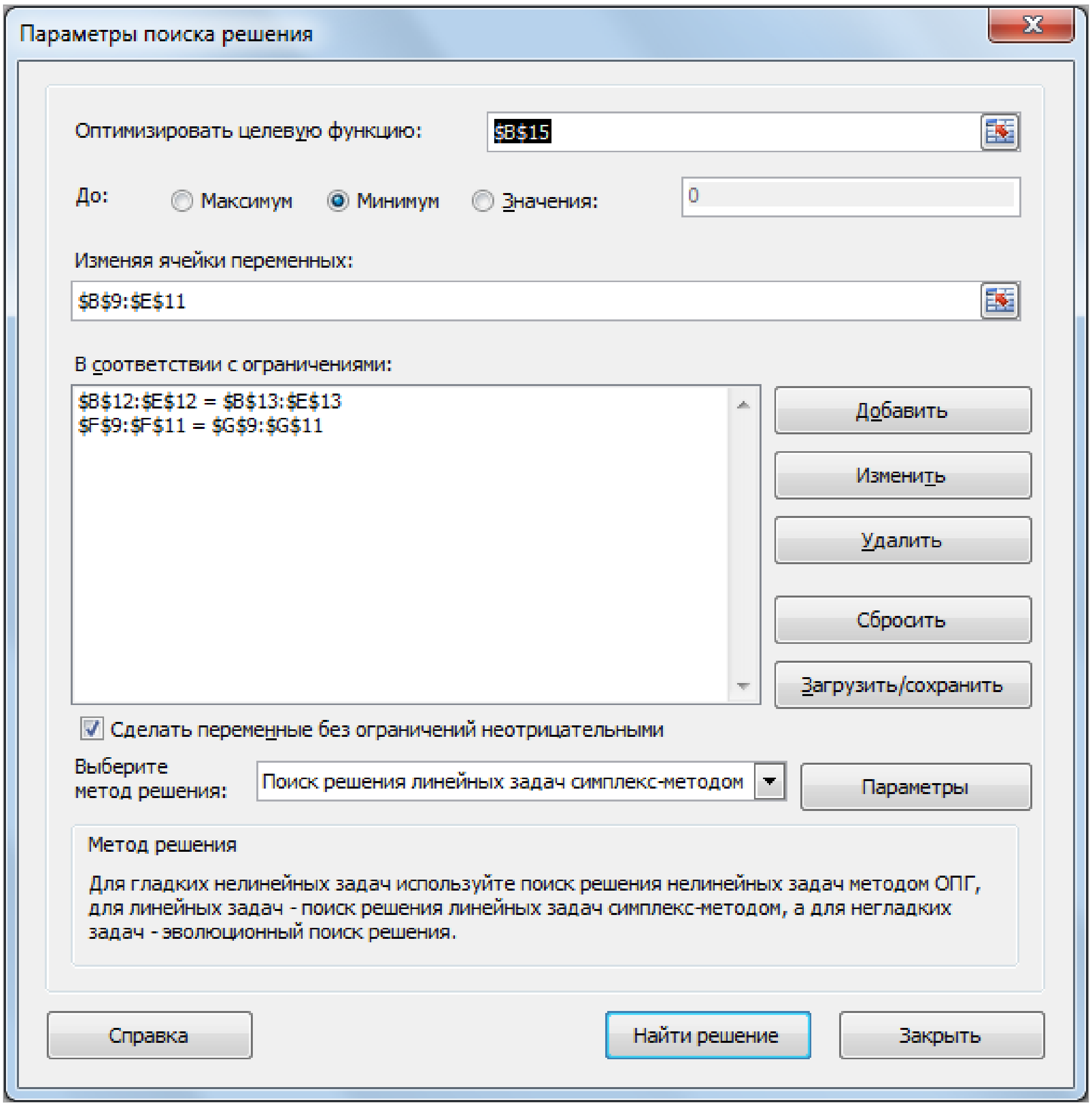


Рис. 2.31

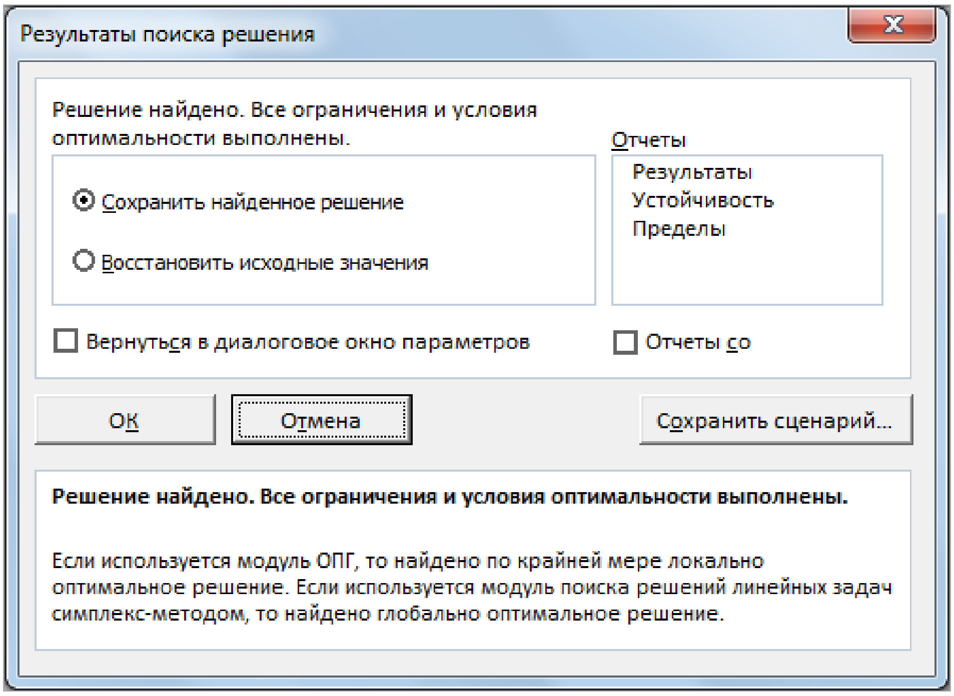


Рис. 2.32

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение и нажать кнопку ОК. После чего на рабочим листе отобразится решение задачи (рис. 2.33).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Тарифы перевозок 1 т муки**						
2	Мукомольные предприятия	Хлебозаводы					
3		I	II	III	IV		
4	A	8	1	9	7		
5	B	4	6	2	12		
6	C	3	5	8	9		
7	**Объемы перевозок**						
8		I	II	III	IV	Суммарный план перевозки из пунктов производства	Объемы производства
9	A	0	60	0	50	110	110
10	B	20	0	170	0	190	190
11	C	60	0	0	30	90	90
12	Суммарный план перевозки в пункты потребления	80	60	170	80		
13	Объемы потребления	80	60	170	80		
14							
15	**Общая стоимость перевозок (целевая функция)**	1280					

Рис. 2.33

В результате решения задачи получили общую стоимость перевозок 1280 у.е.

Поставки муки на хлебозавод I осуществляется с мукомольного предприятия B (20 т) и с мукомольного предприятия C (60 т). Поставки муки на хлебозавод II осуществляется с мукомольного предприятия A (60 т). Поставки муки на хлебозавод III осуществляется с мукомольного предприятия B (170 т). Поставки муки на хлебозавод IV осуществляется с мукомольного предприятия A (50 т) и с мукомольного предприятия C (30 т).

Покажем результаты решения задачи еще в виде отчетов по результатам (рис. 2.34), устойчивости (рис. 2.35) и пределам (рис. 2.36).

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [Поик решения Транспортная.xlsx]Транспортная (2)
Отчет создан: 02.12.2015 14:34:05
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,015 секунд.
Число итераций: 12 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$B$15	Общая стоимость перевозок (целевая функция) I	0	1280

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$9	A I	0	0	Продолжить
$C$9	A II	0	60	Продолжить
$D$9	A III	0	0	Продолжить
$E$9	A IV	0	50	Продолжить
$B$10	B I	0	20	Продолжить
$C$10	B II	0	0	Продолжить
$D$10	B III	0	170	Продолжить
$E$10	B IV	0	0	Продолжить
$B$11	C I	0	60	Продолжить
$C$11	C II	0	0	Продолжить
$D$11	C III	0	0	Продолжить
$E$11	C IV	0	30	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$B$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления I	80	$B$12=$B$13	Привязка	0
$C$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления II	60	$C$12=$C$13	Привязка	0
$D$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления III	170	$D$12=$D$13	Привязка	0
$E$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления IV	80	$E$12=$E$13	Привязка	0
$F$9	A Суммарный план перевозки из пунктов производства	110	$F$9=$G$9	Привязка	0
$F$10	B Суммарный план перевозки из пунктов производства	190	$F$10=$G$10	Привязка	0
$F$11	C Суммарный план перевозки из пунктов производства	90	$F$11=$G$11	Привязка	0

Рис. 2.34

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Поик решения Транспортная.xlsx]Транспортная (2)
Отчет создан: 02.12.2015 14:41:47
Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$9	A I	0	7	8	1E+30	7
$C$9	A II	60	0	1	2	1E+30
$D$9	A III	0	10	9	1E+30	10
$E$9	A IV	50	0	7	7	2
$B$10	B I	20	0	4	2	7
$C$10	B II	0	2	6	1E+30	2
$D$10	B III	170	0	2	7	1E+30
$E$10	B IV	0	2	12	1E+30	2
$B$11	C I	60	0	3	7	2
$C$11	C II	0	2	5	1E+30	2
$D$11	C III	0	7	8	1E+30	7
$E$11	C IV	30	0	9	2	7

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления I	80	4	80	0	20
$C$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления II	60	4	60	0	20
$D$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления III	170	2	170	0	170
$E$12	Суммарный план перевозки в пункты потребления IV	80	10	80	0	20
$F$9	A Суммарный план перевозки из пунктов производства	110	-3	110	20	0
$F$10	B Суммарный план перевозки из пунктов производства	190	0	190	0	1E+30
$F$11	C Суммарный план перевозки из пунктов производства	90	-1	90	20	0

Рис. 2.35

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [Поиск решения Транспортная.xlsx]Транспортная (2)
Отчет создан: 02.12.2015 14:44:44

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$B$15	Общая стоим	1280

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$9	A I	0	0	1280	0	1280
$C$9	A II	60	60	1280	60	1280
$D$9	A III	0	0	1280	0	1280
$E$9	A IV	50	50	1280	50	1280
$B$10	B I	20	20	1280	20	1280
$C$10	B II	0	0	1280	0	1280
$D$10	B III	170	170	1280	170	1280
$E$10	B IV	0	0	1280	0	1280
$B$11	C I	60	60	1280	60	1280
$C$11	C II	0	0	1280	0	1280
$D$11	C III	0	0	1280	0	1280
$E$11	C IV	30	30	1280	30	1280

Рис. 2.36

Задача о назначении

Математическая постановка задачи

Задача о назначениях относится к задачам линейного программирования, и является частным случаем транспортной задачи. Данная задача формулируется следующим образом.

Имеются n работ и n кандидатов для их выполнения. Каждый из кандидатов может выполнить любую работу. Назначению i-го кандидата (i=1, 2, …,n) на j-ю (j=1, 2, …,n) работу соответствует определенная эффективность (прибыль, производительность) или затраты какого-либо ресурса c_{ij}. Требуется найти такие назначения кандидатов на все работы, которые обеспечат наибольшую эффективность, т.е. минимум суммарных затрат или максимум прибыли (производительности). При этом каждого кандидата можно назначить на выполнение только одной работы и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Обозначим за x_{ij} переменную, которая принимает значение 1 или 0:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i - \text{й кандидат выполняет } j - \text{ю работу} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая постановка задачи о назначениях состоит в определении максимального (минимального) значения целевой функции F (2.20)

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.20}$$

при условиях (2.21)-(2.22):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; (i = 1, \dots, n), \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; (j = 1, \dots, n), \tag{2.22}$$

Задача о назначениях является сбалансированной, если число работ равно числу кандидатов на выполнение этих работ, и задача не сбалансирована в противном случае.

Пример решения задачи о назначении

Для монтажа четырех объектов (n=4) требуется четыре крана (n=4). Известно время c_{ij} монтажа i-м краном j-го объекта (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4) (табл. 2.3)

Таблица 2.3

Затраты времени на монтаж объектов

Код крана	Объекты			
	I	II	III	IV
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Необходимо распределить краны по объектам так, чтобы суммарное время монтажа всех объектов было минимальным. Каждый кран может обслуживать любой объект. На объекте работает только один кран.

Решение. Составим математическую модель для решения поставленной задачи.

Обозначим переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i - \text{й кран обслуживает } j - \text{й объект} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

c_{ij} – время монтажа i-м краном j-го объекта (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4)

Математическая постановка данной задачи состоит в определении минимального значения целевой функции

$$F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \dots, n),$$

С учетом исходных данных целевая функция имеет вид:

$$F = 3x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 4x_{31} + \\ +7x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34} + 9x_{41} + 7x_{42} + 3x_{43} + 8x_{44}$$

при условиях:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{gathered}$$

Задача о назначениях является сбалансированной, т.к. число объектов равно числу кранов для выполнения работ на данных объектах.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 2.37). Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты времени на монтаж объектов**					
2	Код крана	Объекты				
3		I	II	III	IV	
4	1					
5	2					
6	3					
7	4					
8	**Распределение работ**					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1					
11	2					
12	3					
13	4					
14	Ограничения по количеству объектов					
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**					

Рис. 2.37

Заполним таблицу.

Блок ячеек B4:E7 содержит затраты времени c_{ij} на монтаж объектов.

Введем необходимые формулы согласно составленной модели задачи.

В ячейки F10:F13 суммарное количество кранов на объекте.

В ячейки B14:E14 суммарное количество объектов.

В ячейку B16 введем формулу для целевой функции $F = 3x_{11} + 7x_{12} + {}$ ${}+5x_{13} + 8x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 4x_{31} + 7x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34} + {}$ ${}+9x_{41}+7x_{42} + 3x_{43} + 8x_{44}$. Для этого используем функцию =СУММПРОИЗВ().

Блок ячеек B10:E13 будет содержать оптимальный план распределения кранов по объектам. Значения этих ячеек будет вычислено в процессе решения задачи.

На рис. 2.38 показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты времени на монтаж объектов**					
2	Код крана	Объекты				
3		I	II	III	IV	
4	1	3	7	5	8	
5	2	2	4	4	5	
6	3	4	7	2	8	
7	4	9	7	3	8	
8	**Распределение работ**					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1					=СУММ(B10:E10)
11	2					=СУММ(B11:E11)
12	3					=СУММ(B12:E12)
13	4					=СУММ(B13:E13)
14	Ограничения по количеству объектов	=СУММ(B10:B13)	=СУММ(C10:C13)	=СУММ(D10:D13)	=СУММ(E10:E13)	
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**	=СУММПРОИЗВ(B4:E7;B10:E13)				

Рис. 2.38

Для решения данной задачи используем инструмент MS Excel 2010 Поиск решения. Для этого на вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры (рис. 2.39):

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – B16;
- выбираем нахождение минимума целевой функции;
- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B10:E13;
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом.

В область В соответствии и ограничениями введем ограничения. Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку Добавить. Отобразится окно диалога Добавление ограничений.

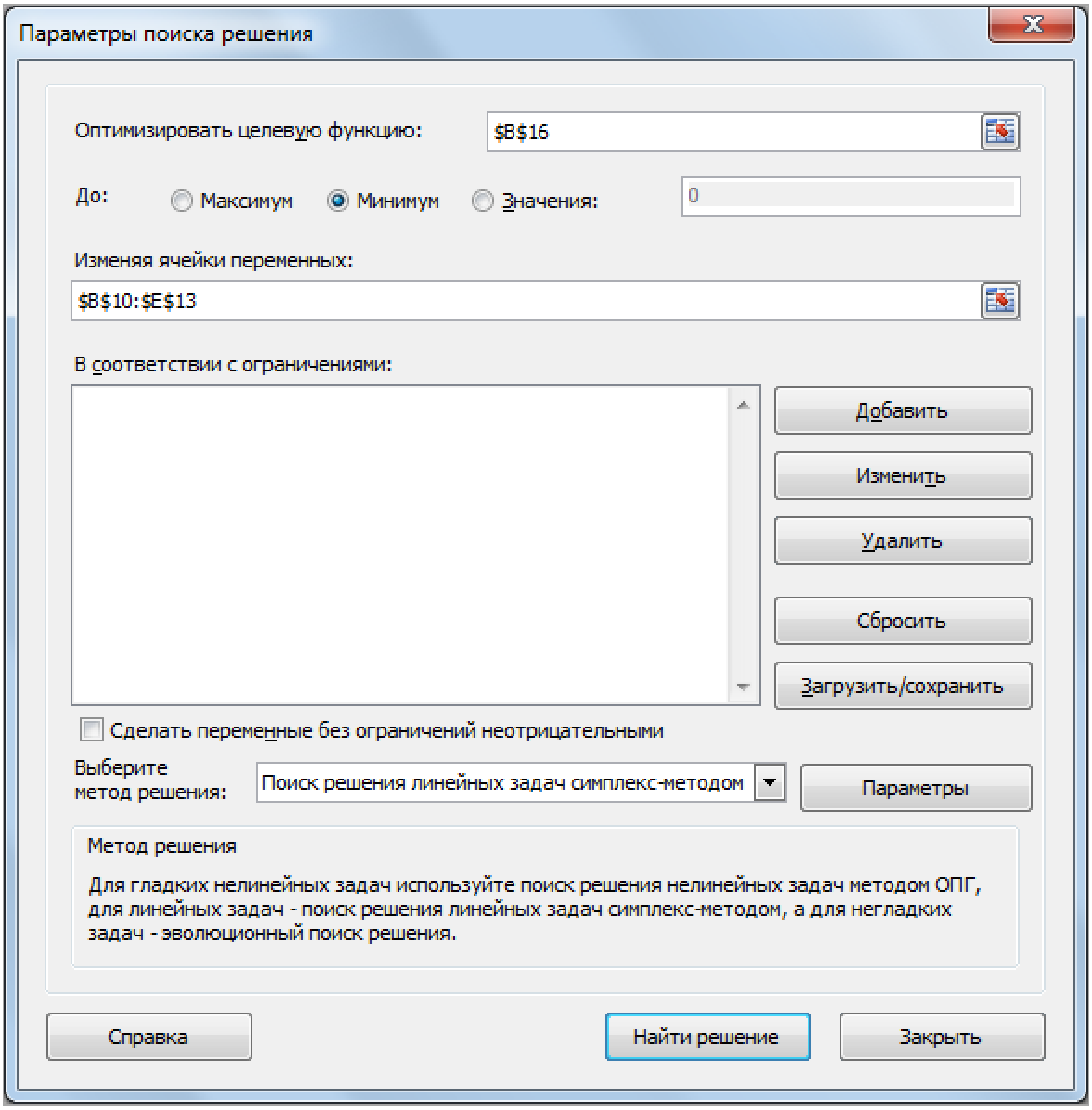


Рис. 2.39

Добавляем ограничения:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона F10:F13, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле Ограничение вводим 1, нажимаем кнопку Добавить (рис. 2.40). Ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна Добавление ограничения будут очищены для ввода следующего ограничения.

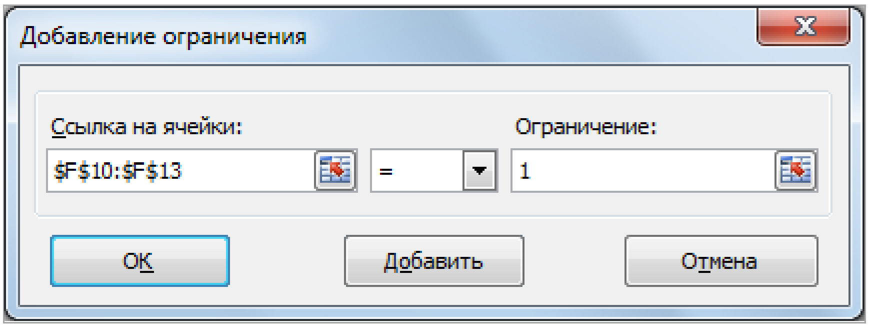


Рис. 2.40

Добавляем ограничения:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона B14:E14, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле Ограничение вводим 1, нажимаем кнопку Добавить (рис. 2.41). Ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна Добавление ограничения будут очищены для ввода следующего ограничения.

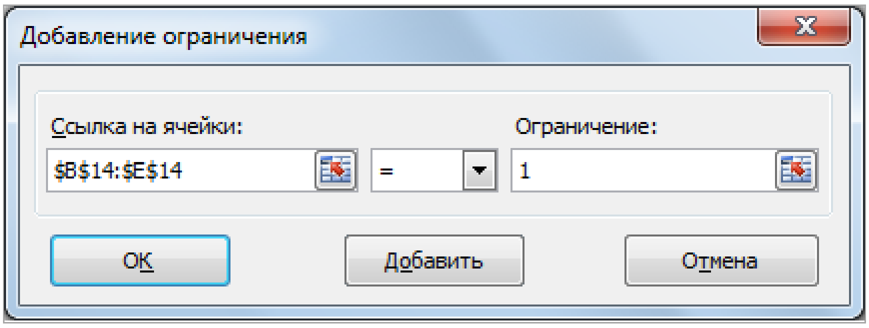


Рис. 2.41

Добавляем ограничения на переменные x_{ij}, которые принимают значения 1 или 0. В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона B10:E13, выбираем в раскрывающемся списке бин, в поле Ограничение автоматически отобразится бинарное (рис 2.42). Нажимаем кнопку ОК.

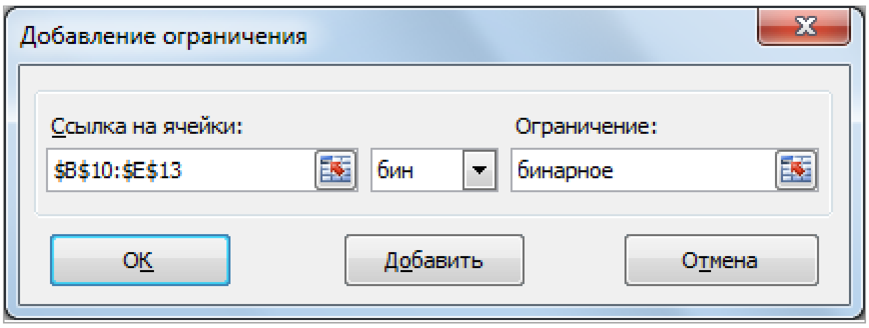


Рис. 2.42

В результате будет принято последнее ограничение и возврат к диалоговому окну Параметры поиска решения (рис 2.43).

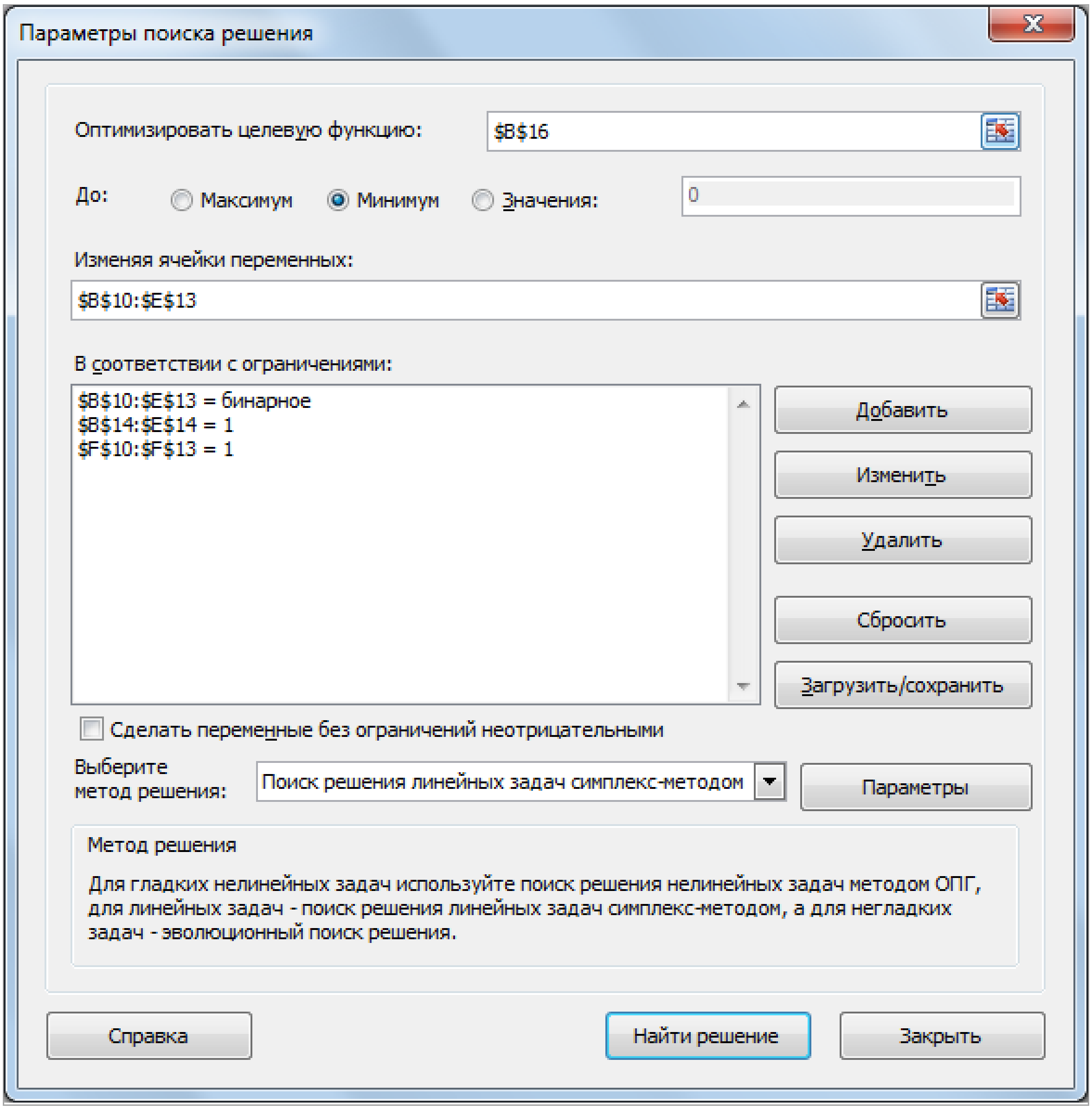


Рис. 2.43

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.44).

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение. Для вывода отчета по результатам выделить в поле Отчеты Результаты нажать кнопку ОК. После чего на рабочем листе отобразится решение задачи (рис. 2.45). На созданном одноименном листе будет выведен Отчет о результатах (рис. 2.46).

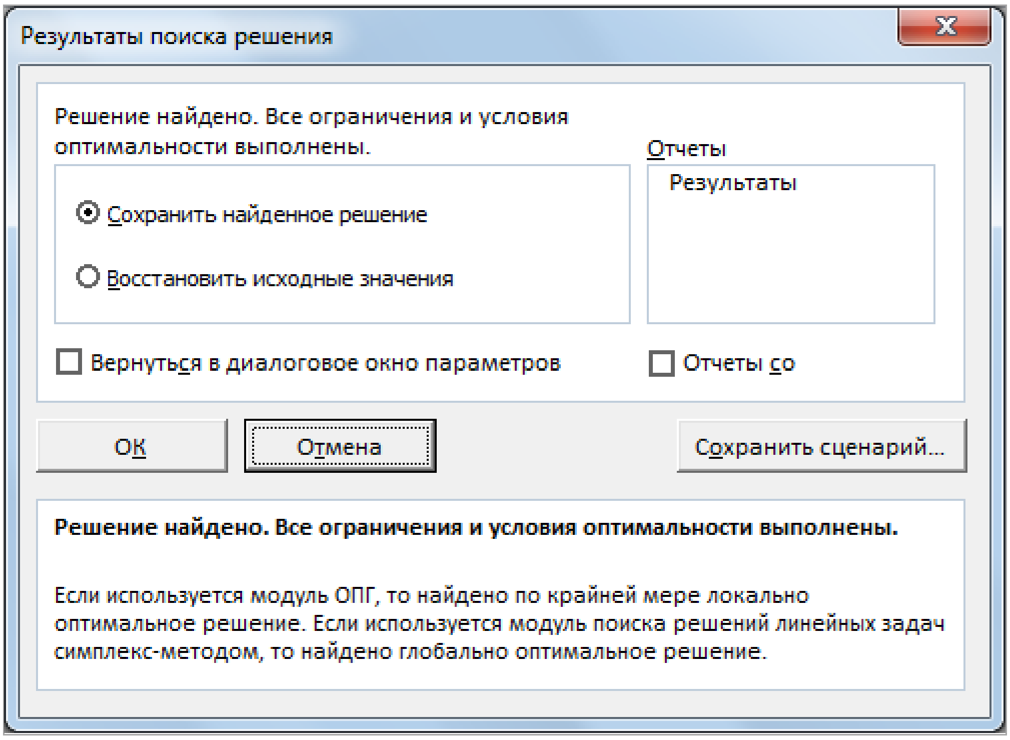


Рис. 2.44

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты времени на монтаж объектов**					
2		Объекты				
3	Код крана	I	II	III	IV	
4	1	3	7	5	8	
5	2	2	4	4	5	
6	3	4	7	2	8	
7	4	9	7	3	8	
8	**Распределение работ**					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1	1	0	0	0	1
11	2	0	1	0	0	1
12	3	0	0	1	0	1
13	4	0	0	0	1	1
14	Ограничения по количеству объектов	1	1	1	1	
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**	17				

Рис. 2.45

В результате решения задачи получили суммарное время монтажа всех объектов 17 ед. При этом распределение кранов по объектам следующее:

1-й кран занимается монтажом I объекта;

2-й – II объекта;

3-й – III объекта;

4-й – IV объекта.

Заметим, что для решения данной задачи доступен для вывода только отчет по результатам.

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [Назначения.xlsx]Назначения
Отчет создан: 05.12.2015 22:36:04
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,016 секунд.
Число итераций: 14 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$B$16	Суммарное время монтажа (целевая функция) I	0	17

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$10	I	0	1	Бинарное
$C$10	II	0	0	Бинарное
$D$10	III	0	0	Бинарное
$E$10	IV	0	0	Бинарное
$B$11	I	0	0	Бинарное
$C$11	II	0	1	Бинарное
$D$11	III	0	0	Бинарное
$E$11	IV	0	0	Бинарное
$B$12	I	0	0	Бинарное
$C$12	II	0	0	Бинарное
$D$12	III	0	1	Бинарное
$E$12	IV	0	0	Бинарное
$B$13	I	0	0	Бинарное
$C$13	II	0	0	Бинарное
$D$13	III	0	0	Бинарное
$E$13	IV	0	1	Бинарное

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$B$14	Ограничения по количеству объектов I	1	$B$14=1	Привязка	0
$C$14	Ограничения по количеству объектов II	1	$C$14=1	Привязка	0
$D$14	Ограничения по количеству объектов III	1	$D$14=1	Привязка	0
$E$14	Ограничения по количеству объектов IV	1	$E$14=1	Привязка	0
$F$10	Ограничения по количеству кранов на объекте	1	$F$10=1	Привязка	0
$F$11	Ограничения по количеству кранов на объекте	1	$F$11=1	Привязка	0
$F$12	Ограничения по количеству кранов на объекте	1	$F$12=1	Привязка	0
$F$13	Ограничения по количеству кранов на объекте	1	$F$13=1	Привязка	0
$B$10:$E$13=Бинарное					

Рис. 2.46

Задача о раскрое

Математическая постановка задачи

Проблема оптимального раскроя возникает во многих областях производства. Относится к задачам линейного программирования. Данная задача формулируется следующим образом. Из материала произвольного размера необходимо выкроить m видов заготовок i-го ($i = 1, 2, \ldots, m$) типа в количестве b_i штук. Эти заготовки могут быть получены n способами.

При j-м ($j = 1, 2, \ldots, n$) варианте раскроя единицы материала выкраивается a_{ij} заготовок i-го вида. Стоимость отходов при j-м варианте раскроя равна c_j.

Задача состоит в том, чтобы путем наиболее рационального раскроя имеющихся материалов свести эти отходы к минимуму.

Обозначим через x_j – количество единиц материала, раскраиваемых j-м способом.

Математическая постановка задачи о раскрое состоит в определении минимального значения целевой функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \ b_i \ (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, \ldots, n).$$

$$x_j - \text{целое}$$

Пример решения задачи о раскрое

Раскрой листового материала

Фирма получила от поставщиков 100 листов фанеры размером 2,5 х 1,5 м, которую нужно раскроить на прямоугольные заготовки А, Б, В размерами:

А – 2 х 1 м

Б – 1 х 0,75 м

В– 0,5 х 0,5 м

в ассортименте 1 : 4 : 12. Раскрой нужно осуществить при минимальных отходах.

В фирме используют четыре варианта раскроя (рис. 2.47).

В нашей постановке задачи n = 4 (j = 1, 2, 3, 4), m = 3 (i = 1, 2, 3), матрица a_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) количества i-й заготовки при j-м варианте раскроя будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Отметим, что в третьем варианте раскроя от листа фанеры будет остаток размером 0,25м^2.

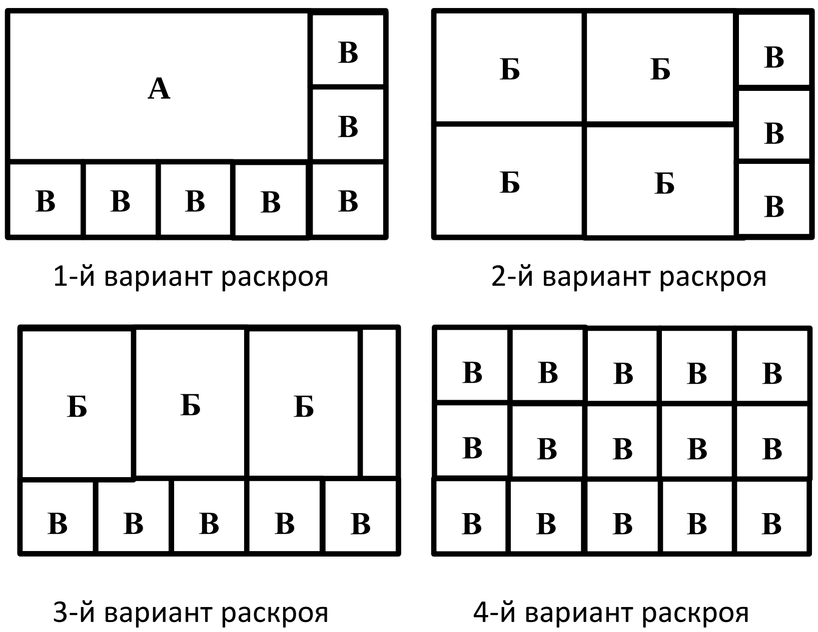


Рис. 2.47

Обозначим за x_j количество листов, раскраиваемых j-м вариантом (j = 1, 2, 3, 4), тогда количество заготовок вида А равно x_1, вида Б: $4x_2 + 3x_3$, вида В: $7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 15x_4$.

Т.к. количество заготовок А, Б, В следует изготовить в соотношении 1 : 4 : 12, то должно выполняться равенство:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{4x_2 + 3x_3}{4} = \frac{7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 15x_4}{12}$$

Математическая модель задачи состоит в определении минимума целевой функции

$$F = 0{,}25x_3$$

при условиях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$
$$4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$$
$$5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 0$$
$$28x_1 + 36x_2 - 16x_3 + 60x_4 = 0$$

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 2.48). Заливкой выделены ячейки, в которые будут введены формулы и вычислены результаты.

	A	B	C	D	E	F
1	**Количество раскраиваемых листов**				Ограничение по количеству листов	Всего листов
2	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант		
3	x_1	x_2	x_3	x_4		
4						
5						
6	**Ограничения**					
7						
8						
9						
10						
11						
12	**Целевая функция**					

Рис. 2.48

Заполним таблицу.

Блок ячеек A4:D4 содержит x_j (j = 1, 2, 3, 4), значения которых нужно найти. В ячейку E4 введем формулу $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, а в F4 ограничение по количеству имеющихся листов.

Ячейки A6:F10 содержат коэффициенты ограничений и необходимые формулы в соответствии с моделью решаемой задачи.

В ячейке B12 находится целевая функция.

На рис. 2.49 показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

Для решения данной задачи используем инструмент MS Excel 2010 Поиск решения. Для этого на вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

	A	B	C	D	E	F
1	**Количество раскраиваемых листов**				Ограничение по количеству листов	Всего листов
2	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант		
3	x_1	x_2	x_3	x_4		
4					=СУММ(A4:D4)	100
5						
6	**Ограничения**					
7						
8	4	-4	-3	0	=СУММПРОИЗВ($A$4:$D$4;A8:D8)	0
9	5	-3	-5	-15	=СУММПРОИЗВ($A$4:$D$4;A9:D9)	0
10	28	-36	-16	60	=СУММПРОИЗВ($A$4:$D$4;A10:D10)	0
11					(Ctrl)	
12	**Целевая функция**	=0,25*C4				

Рис. 2.49

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры (рис. 2.50):

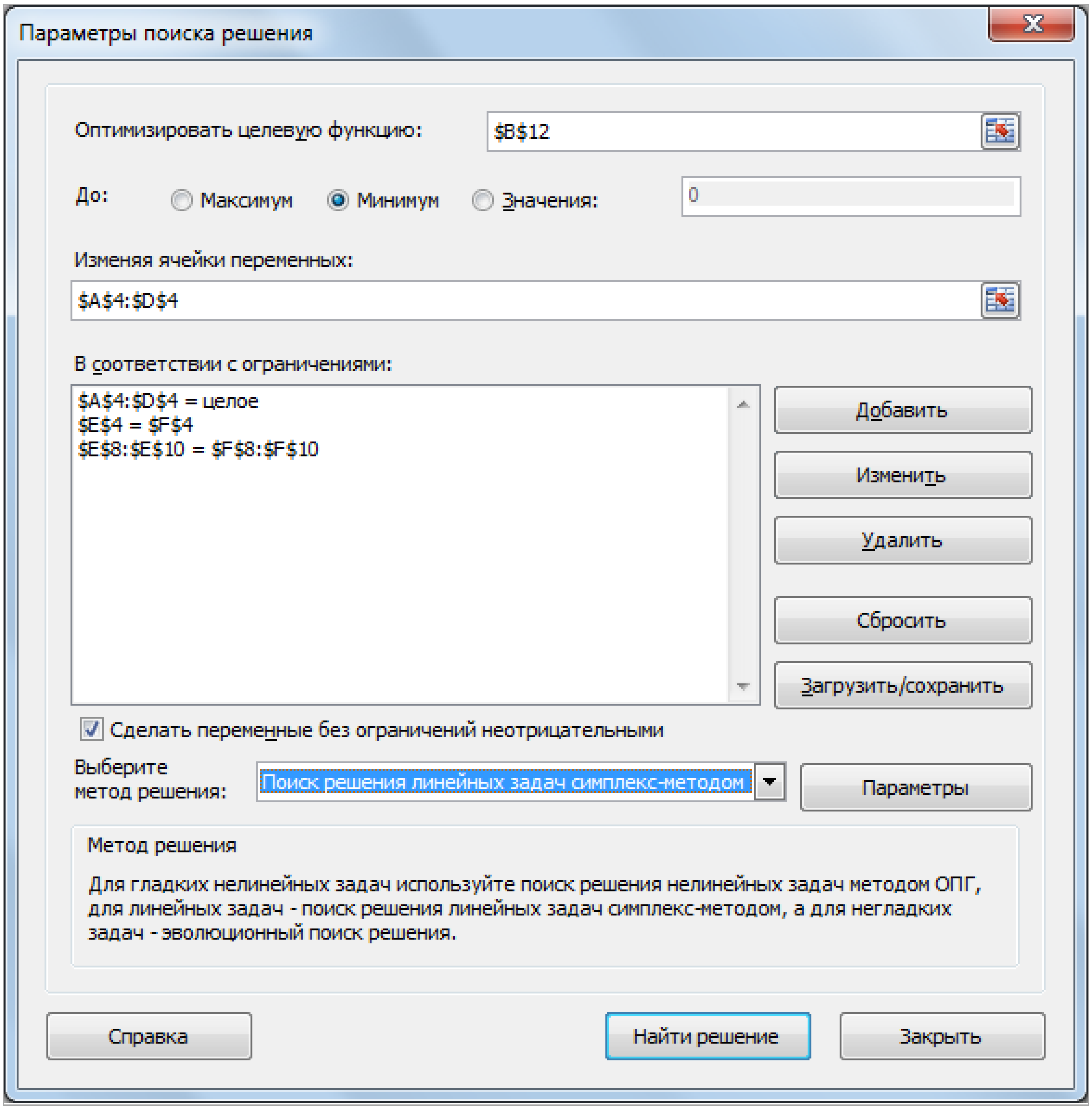


Рис. 2.50

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – B12;
- выбираем нахождение минимума целевой функции;
- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных A4:D4;
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом

В область В соответствии и ограничениями введем ограничения.

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 2.51), с помощью которого сохраним найденное решение (рис. 2.52) и сгенерируем отчет по результатам (рис. 2.53).

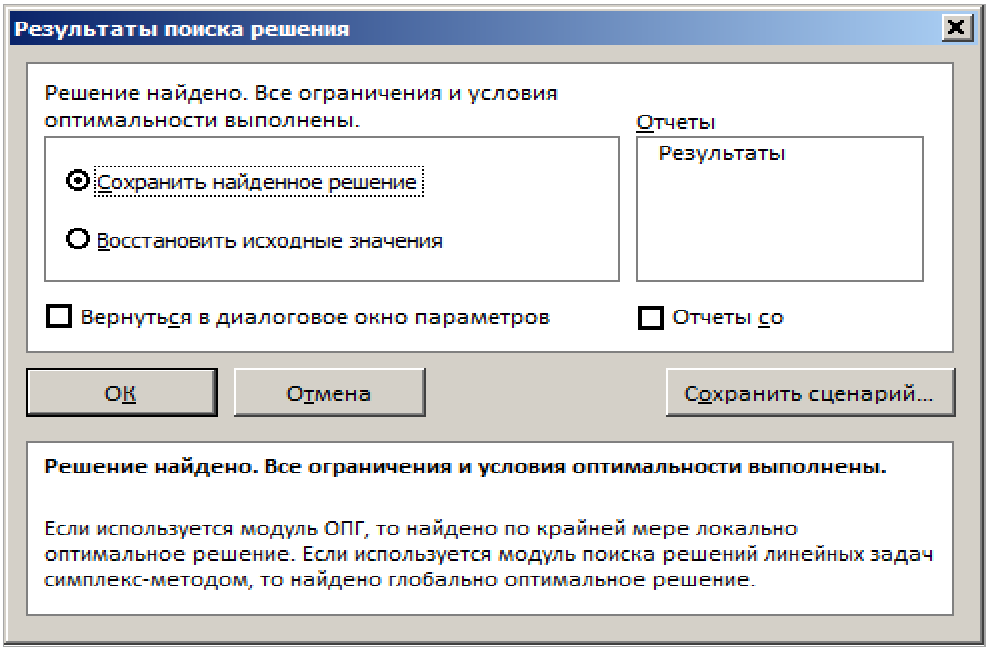


Рис. 2.51

	A	B	C	D	E	F
1	**Количество раскраиваемых листов**				Ограничение по количеству листов	Всего листов
2	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант		
3	x_1	x_2	x_3	x_4		
4	46	25	28	1	100	100
5						
6	**Ограничения**					
7						
8	4	-4	-3	0	0	0
9	5	-3	-5	-15	0	0
10	28	-36	-16	60	0	0
11						
12	**Целевая функция**	7				

Рис. 2.52

В результате решения задачи получили, что первым вариантом необходимо раскроить 46 листов фанеры, вторым 25 листов, третьим 28 листов, четвертым 1 лист.

При этом заготовок вида А будет получено 46 шт., вида Б: $4 \cdot 25 + 3 \cdot 28 = 184$ шт., вида В: $7 \cdot 46 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 28 + 15 = 552$.

Соотношение числа заготовок 1 : 4 : 12 выполняется.

Отходы при таком плане раскроя составят 7 м^2 (значение целевой функции).

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [Раскрой.xlsx]Задача о раскрое
Отчет создан: 18.12.2015 0:07:19
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0 секунд.
Число итераций: 0 Число подзадач: 2
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$B$12	Целевая функция x2	0	7

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$A$4	x1	0	46	Целочисленное
$B$4	x2	0	25	Целочисленное
$C$4	x3	0	28	Целочисленное
$D$4	x4	0	1	Целочисленное

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$E$4	Ограничение по количеству листов	100	$E$4=$F$4	Привязка	0
$E$8	Ограничение по количеству листов	0	$E$8=$F$8	Привязка	0
$E$9	Ограничение по количеству листов	0	$E$9=$F$9	Привязка	0
$E$10	Ограничение по количеству листов	0	$E$10=$F$10	Привязка	0
$A$4:$D$4=Целочисленное					

Рис. 2.53

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математическая постановка задачи

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач с нелинейной целевой функцией и (или) областью допустимых решений, определенной нелинейными ограничениями.

Задача нелинейного программирования состоит в определении максимального или минимального значения целевой функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \ \left(i = \overline{1, k}\right)$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \ \left(i = \overline{k+1, m}\right)$$

где f и g_i некоторые функции n переменных, а b_i заданные числа. Если хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Пример решения задачи нелинейного программирования

Задача определения оптимального плана производства

Известен рыночный спрос на некоторое изделие в количестве 180 единиц. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям.

Если изделие изготавливается на первом предприятии в количестве x_1 единиц, то затраты на его производство составят $4x_1 + x^2_1$ руб. При изготовлении изделия в количестве x_2 единиц на втором предприятии затраты составят $8x_2 + x^2_2$ руб.

Определить, сколько изделий, изготовленных на разных предприятиях, может предложить концерн, чтобы общие издержки на его производство были минимальными.

Решение. Составим математическую модель для решения задачи.

Издержки производства при изготовлении x_1 изделий на первом предприятии и x_2 на втором составят:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x^2_1 + 8x_2 + x^2_2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ – целые}$$

Таким образом, математическая модель данной задачи состоит в нахождении значений переменных x_1, x_2, при которых функция $F(x_1, x_2)$ принимает минимальное значение при указанных выше ограничениях.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 3.1). Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3					
4					
5	**Издержки производства**				

Рис. 3.1

Блок ячеек B3:C3 содержит оптимальный план производства. Значения этих ячеек будет вычислено в процессе решения задачи.

В ячейку B5 введем формулу для целевой функции $F(x_1, x_2) = 4x_1 + x^2_1 + 8x_2 + x^2_2$. В ячейку D3 – суммарное количество произведенных изделий. В ячейку E3 – ограничение по спросу.

На рис. 3.2 показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3				=B3+C3	180
4					
5	**Издержки производства**	=4*B3+B3^2+8*C3+C3^2			

Рис. 3.2

Теперь для решения задачи подключаем инструмент MS Excel 2010 Поиск решения. Для этого на вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры (рис. 3.3):

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – B5;
- выбираем нахождение минимума целевой функции;
- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B3:C3;
- устанавливаем флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными; Этот параметр позволит выполнить ограничения $x_1, x_2 \geq 0$.
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения нелинейных задач методом ОГП[1];

Теперь введем ограничения в диалоговое окно Параметры поиска решения.

Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку Добавить. Отобразится окно диалога Добавление ограничений.

[1] Метод ОГП – метод обобщенного приведенного градиента. Этот метод используется для решения задач нелинейного программирования.

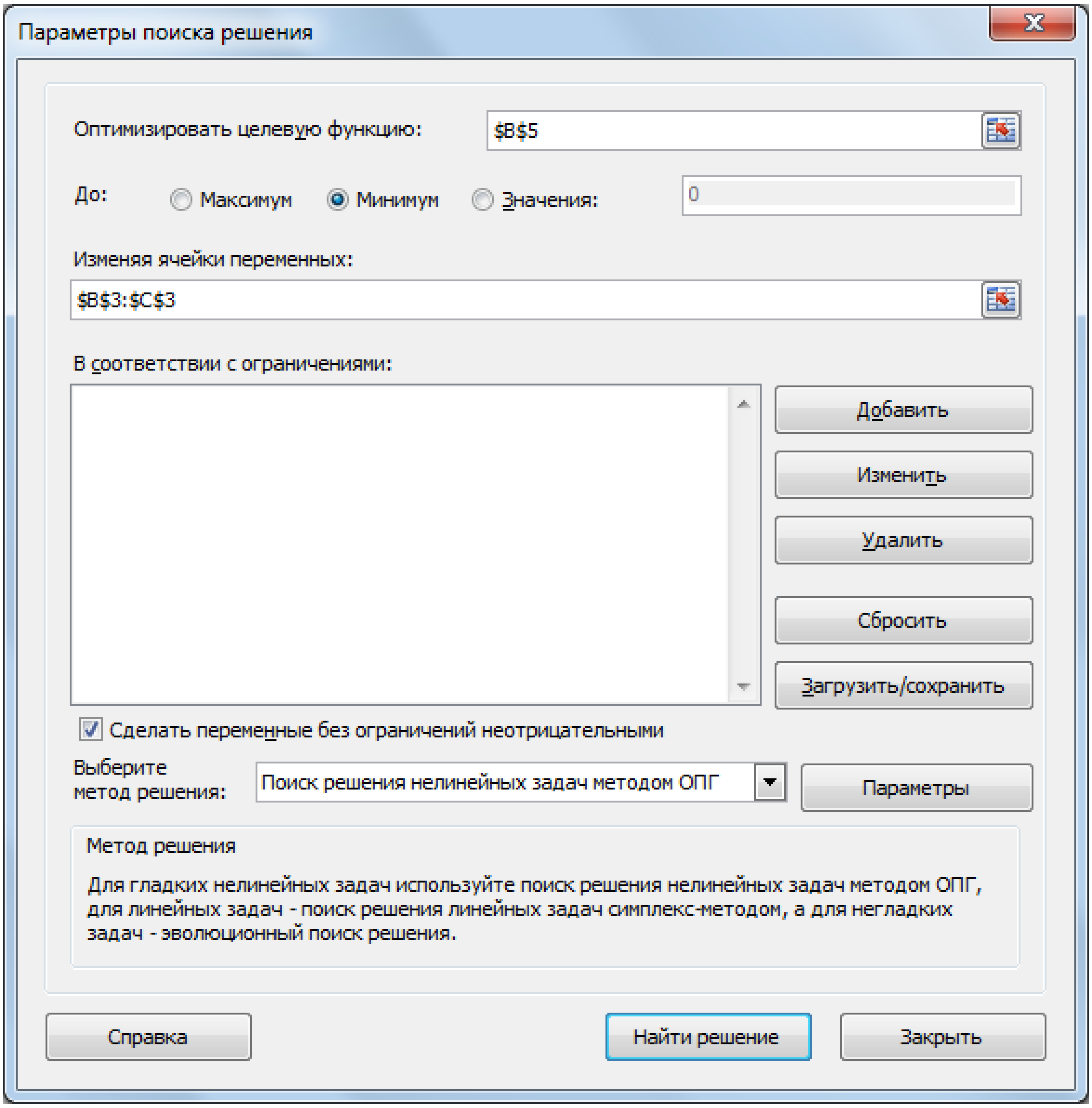


Рис. 3.3

Добавляем ограничения для $x_1 + x_2 = 180$ (рис. 3.4):

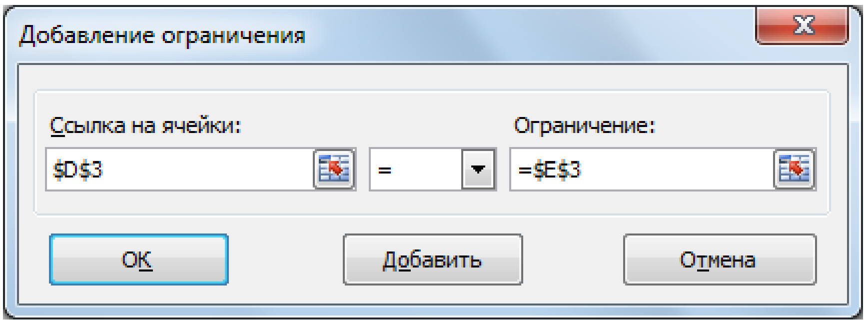


Рис. 3.4

Добавляем ограничения для x_1, x_2 – целые (рис. 3.5):

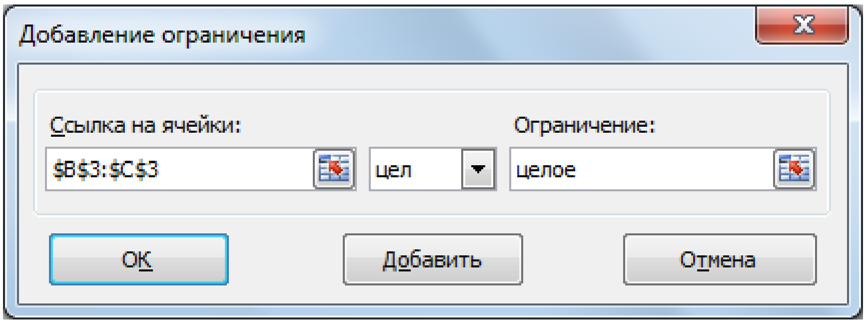


Рис. 3.5

Выбираем кнопку ОК. В результате будет принято последнее ограничение и возврат к диалоговому окну Параметры поиска решения (рис 3.6).

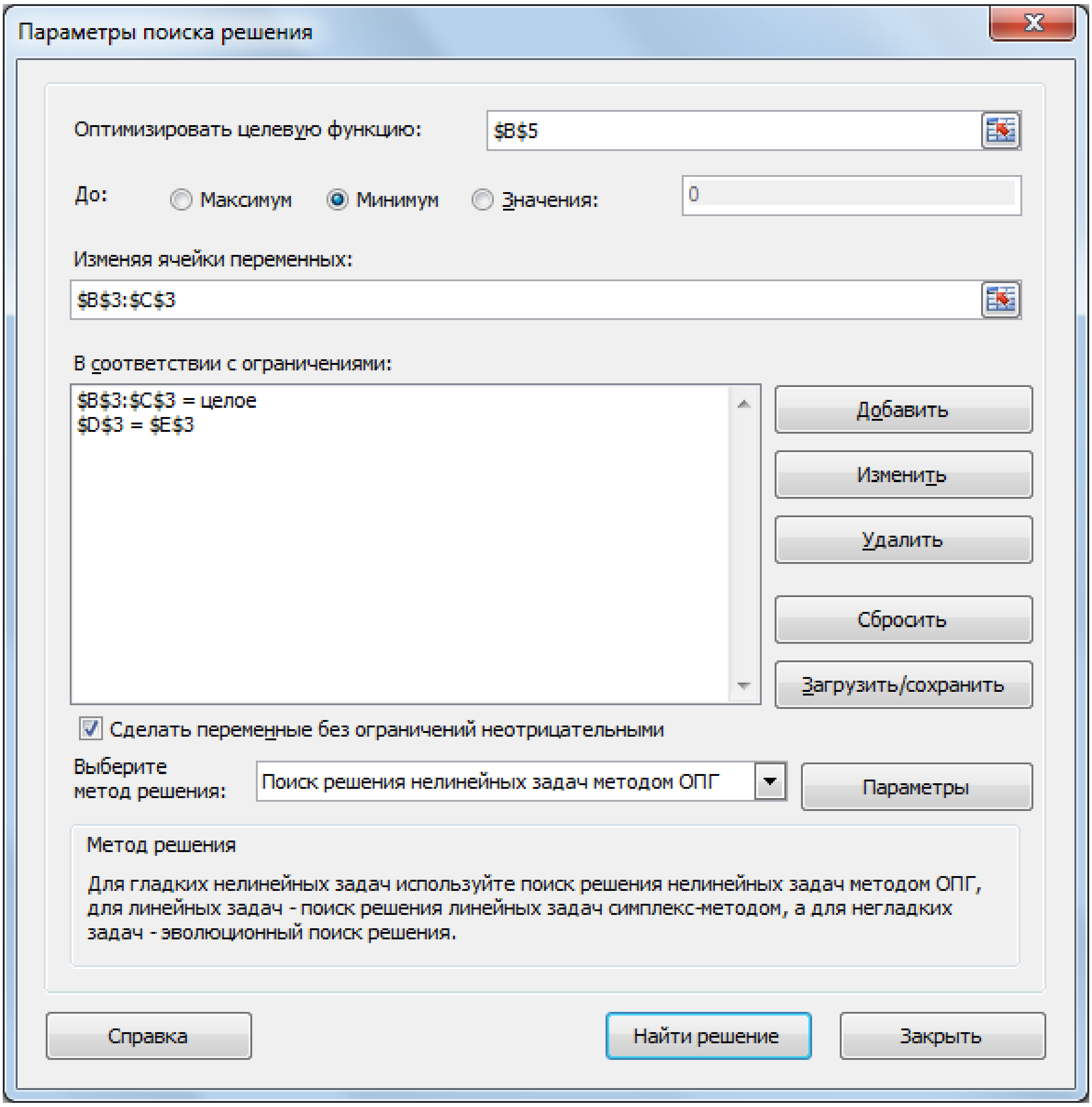


Рис. 3.6

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 3.7).

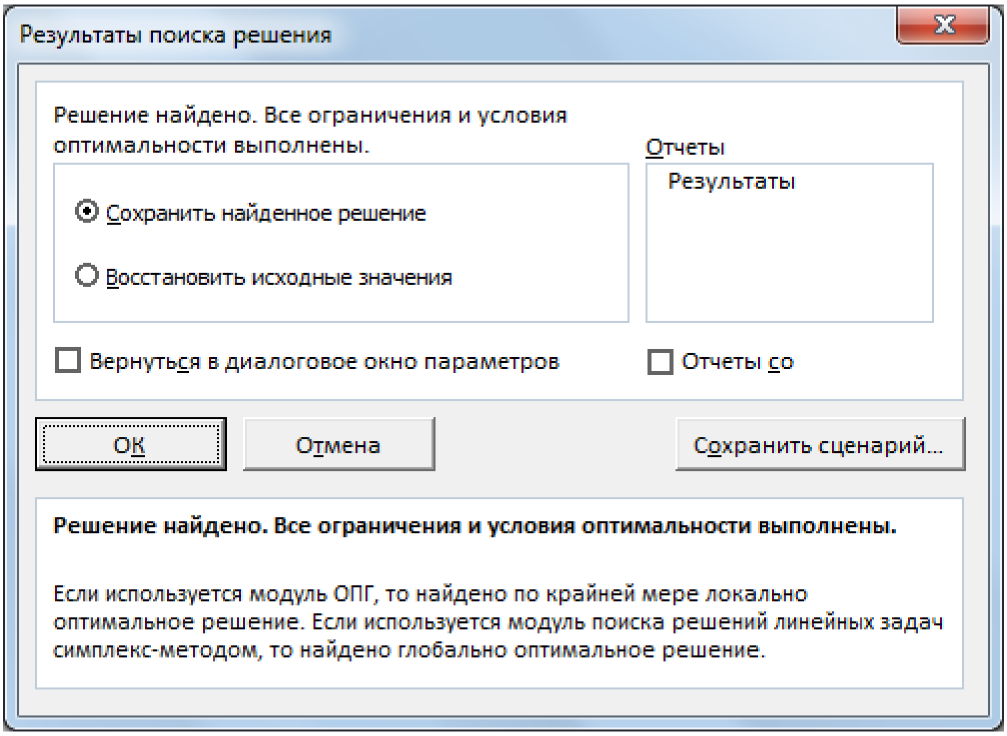
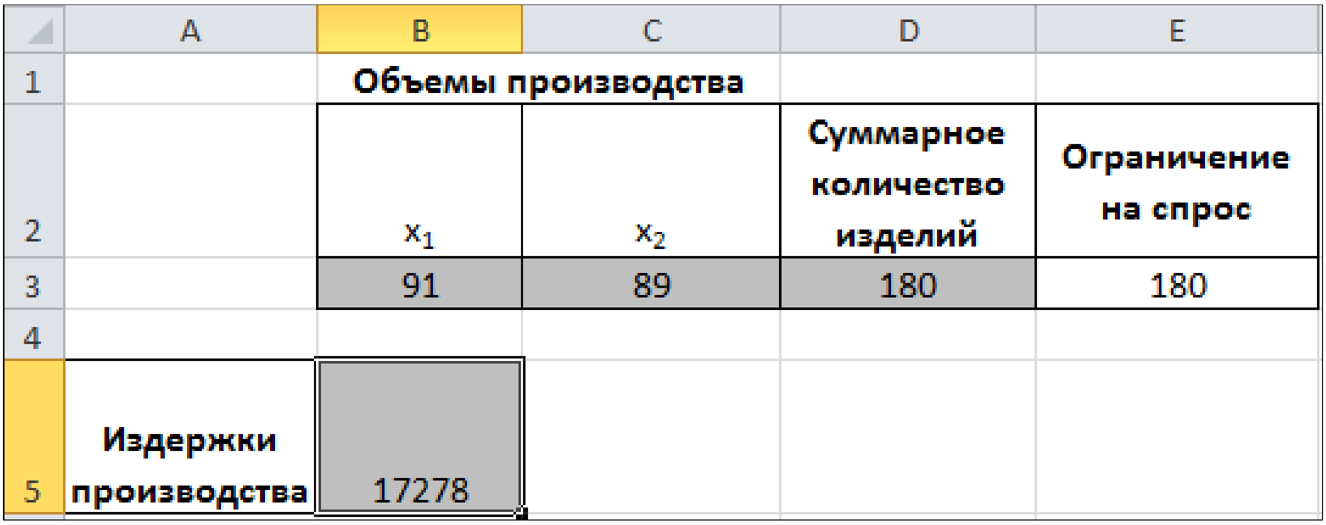


Рис. 3.7

Для сохранения полученного решения и вывода доступного отчета по результатам необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение, выделить в поле Отчеты Результаты и нажать кнопку ОК. После чего на рабочим листе отобразится решение задачи (рис. 3.8). На созданном одноименном листе будет выведен Отчет о результатах.



	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3		91	89	180	180
4					
5	**Издержки производства**	17278			

Рис. 3.8

В результате решения задачи получили оптимальное решение, при котором 91 изделие производится на первом предприятии, 89 – на втором. При этом издержки производства составят 17278 р.

4. Системы линейных алгебраических уравнений

Постановка задачи

К решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) сводятся многочисленные практические задачи. Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

где x_1, x_2, ..., x_n - неизвестные; a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} - коэффициенты при неизвестных; b_1, b_2, ..., b_m - свободные коэффициенты.

Решением СЛАУ (4.1) называется совокупность n чисел x_i (i = 1, 2,…, n), при подстановке которых в систему каждое из ее уравнений обращается в тождество.

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде AX = B, где *A* – матрица коэффициентов при неизвестных (*матрица системы*):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

X – вектор-столбец неизвестных:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

B – вектор-столбец свободных коэффициентов:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Системы уравнений классифицируются следующим образом:

- несовместная система уравнений (система не имеет решений),
- определенная система уравнений (система имеет только одно решение),
- неопределенная система уравнений (система имеет бесконечно много решений).

Рассмотрим решение системы n линейных уравнений с n неизвестными. Будем считать, что рассматриваемая система является определенной, т. е. имеет единственное решение.

Необходимым и достаточным условием существования единственного решения СЛАУ является условие det A≠0, т.е. определитель матрицы A не равен нулю. В случае равенства нулю определителя матрица A называется *вырожденной* и при этом СЛАУ либо не имеет решения, либо имеет их бесчисленное множество.

Для определения решения системы воспользуемся инструментом Поиск Решения пакета MS Excel 2010. Для этого задачу решения СЛАУ (4.1) сведем к оптимизационной задаче. Одно из уравнений (например, первое) возьмём в качестве целевой функции, а оставшиеся (n-1) уравнений будем рассматривать в качестве ограничений. Запишем систему СЛАУ в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n}x_n - b_n = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Теперь задача оптимизации для Поиска решения может звучать следующим образом: найти значения x_i (i = 1, 2,…, n), доставляющие нуль функции, стоящей слева в первом уравнении системы (4.2) при (n-1) ограничениях, представленных оставшимися уравнениями.

Пример решения системы линейных уравнений

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} -5x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 12x_4 = -40 \\ 12x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 50 \\ -7x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} -5x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 12x_4 + 40 = 0 \\ 12x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 2x_4 - 5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 50 = 0 \\ -7x_2 + x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы возьмём в качестве целевой функции, остальные три уравнения будем рассматривать в качестве ограничений.

Создадим на рабочем листе таблицу для ввода исходных данных (рис. 4.1). Заливкой выделены ячейки, в которые будут введены формулы и вычислены результаты.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Корни СЛАУ**							
2	x_1	x_2	x_3	x_4				
3								
4	**Матрица коэффициентов при неизвестных**				**Свободные коэффициенты**	**Уравнения**		
5							**← целевая функция**	
6							**← 1-е ограничение**	
7							**← 2-е ограничение**	
8							**← 3-е ограничение**	
9								

Рис. 4.1

Заполним таблицу.

Блок ячеек A3:D3 содержит решение системы уравнений, которое будет получено в результате выполнения задачи.

Блок ячеек A5:D8 содержит коэффициенты a_{ij} при неизвестных x_i.

Блок ячеек E5:E8 содержит свободные коэффициенты системы.

Введем необходимые формулы в блок ячеек F5:F8.

На рис. 4.2 показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Корни СЛАУ						
2	x_1	x_2	x_3	x_4			
3							
4	Матрица коэффициентов при неизвестных				Свободные коэффициенты	Уравнения	
5	-5	-9	3	12	40	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A5:D5)+E5	← целевая функция
6	12	3	11	2	-5	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A6:D6)+E6	← 1-е ограничение
7	5	-3	-5	0	-50	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A7:D7)+E7	← 2-е ограничение
8	0	-7	1	0	5	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A8:D8)+E8	← 3-е ограничение

Рис. 4.2

Для решения СЛАУ подключаем инструмент MS Excel 2010 Поиск решения. На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры:

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – F5;
- выбираем нахождение значения целевой функции, равной нулю;
- в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомых неизвестных A3:D3;
- снимаем флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными;
- в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом;

Введем ограничения в диалоговое окно Параметры поиска решения.

В качестве ограничений, как отмечалось выше, используются второе, третье, четвертое уравнения системы.

Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку Добавить.

После ввода всех параметров окно диалога Параметры поиска решения будет иметь вид (рис 4.3):

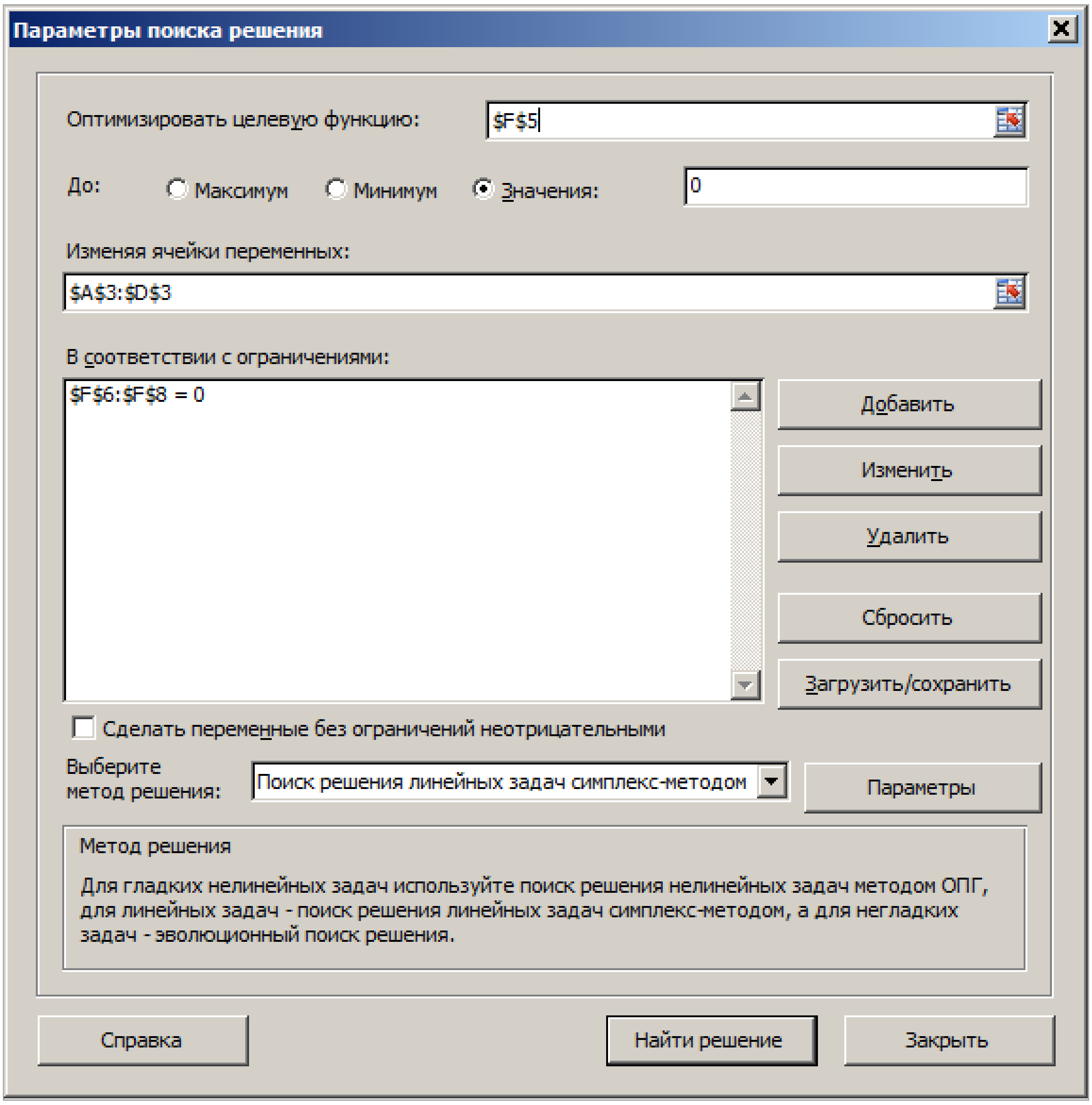


Рис. 4.3

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения (рис. 4.4).

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение и нажать кнопку ОК. После чего на рабочим листе отобразится решение задачи (рис. 4.5).

Таким образом, получено решение системы:

$x_1 = 5 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = -5 \qquad x_4 = 0$

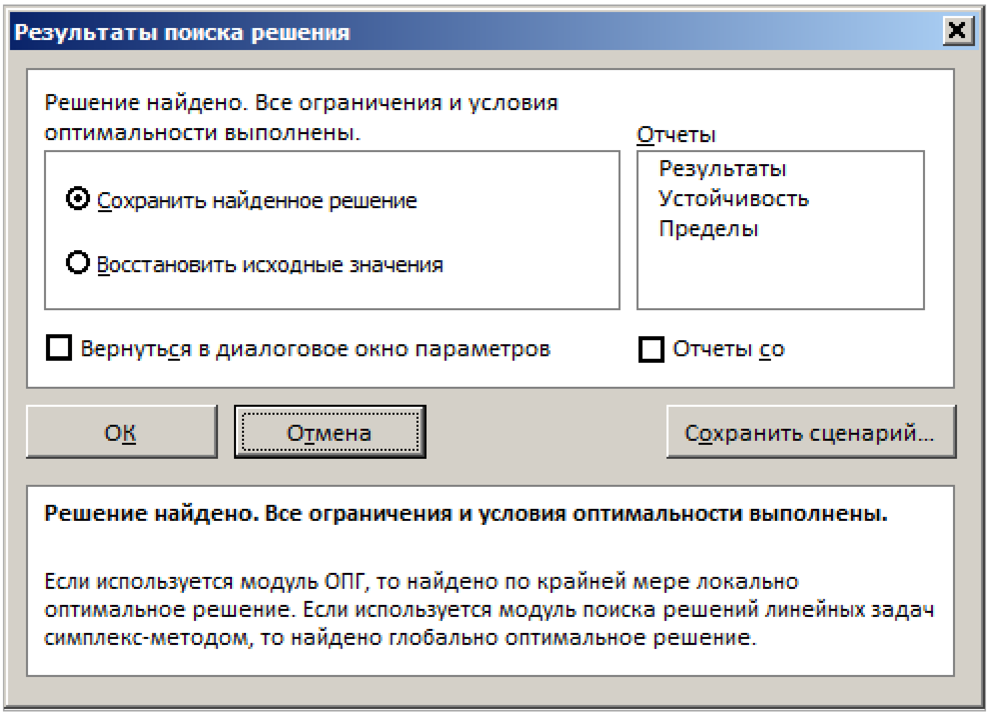


Рис. 4.4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Корни СЛАУ**							
2	x_1	x_2	x_3	x_4				
3	5	0	-5	0				
4	**Матрица коэффициентов при неизвестных**				**Свободные коэффициенты**	**Уравнения**		
5	-5	-9	3	12	40	0	**← целевая функция**	
6	12	3	11	2	-5	0	**← 1-е ограничение**	
7	5	-3	-5	0	-50	0	**← 2-е ограничение**	
8	0	-7	1	0	5	0	**← 3-е ограничение**	
9								

Рис. 4.5

Контрольные задания

Работа № 1

Линейное программирование

Задание

Найти максимум линейной функции *F* при заданной системе ограничений.

1. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных.
2. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
3. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
4. Вывести отчеты по результатам и устойчивости.

Вариант	Целевая функция *F*	Ограничения
1	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$F = x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F = x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

Вариант	Целевая функция F	Ограничения
7	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
8	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
9	$F = 3x_1 + 5x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
10	$F = x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
11	$F = 3x_1 + 5x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
12	$F = 10x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
13	$F = x_1 + x_2$	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
14	$F = 5x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
15	$F = 25x_1 + 13x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Работа № 2
Линейное программирование

Задание

1. Построить математическую модель задачи.
2. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных.
3. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
4. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
5. Вывести отчеты по результатам и устойчивости.

Вариант 1

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены ниже.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина, м^3:			
1-го вида	0,2	0,1	40
2-го вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость, чел.ч.	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия, р.	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов следует изготавливать фабрике, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Ответ. Максимальная прибыль 1 940 р. Количестве столов – 102, шкафов – 166 .

Вариант 2

Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида, общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия приведены ниже.

Тип оборудования	Затраты времени, стан-ч., на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (час)
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия, р.	14	18	

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Ответ. Максимальная прибыль 276 р. Количество изделий А – 12, В – 6.

Вариант 3

Для изготовления трех видов изделий А, В и С используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, прибыль от реализации одного изделия данного вида приведены ниже.

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч.
	А	В	С	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, р.	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Ответ. Максимальная прибыль 492 р. Количество изделий А – 24, изделий В – 18, изделий С – 0.

Вариант 4

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены ниже.

Питательные вещества	Содержание, грамм питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов, р.	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

Ответ. Минимальная общая стоимость дневного рациона 0,565947 р. при количестве продуктов: мясо – 0; рыба – 0; молоко – 0; масло – 0,03335; сыр – 0; крупа – 0,90513; картофель – 0.

Вариант 5

Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели А, В, и С использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, общее количество сырья каждого вида, прибыль от реализации 1 т карамели приведены ниже.

Вид сырья	Нормы расхода сырья, т, на 1 т карамели			Общее количество сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	–	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, р.	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

Ответ. Максимальная прибыль 162 000 р. Количество карамели вида А – 100 т, карамели вида В – 0, карамели вида С – 1200 т.

Вариант 6

На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия, имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида приведены ниже.

Артикул ткани	Норма расхода ткани, м, на одно изделие вида				Общее количество ткани, м
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Цена одного изделия, р.)	9	6	4	7	

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Ответ. Максимальная стоимость продукции 2 115 р. при выпуске количества изделий 1-го вида – 95, 2-го вида –210, 3-го вида – 0, 4-го вида – 0.

Вариант 7

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования и прибыль от реализации одного изделия данного вида приведены ниже.

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-час)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	–	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	–	340
Прибыль от реализации единицы продукции, р.	8	3	2	1	

Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Ответ. Максимальная прибыль 965 р. при выпуске изделий 1-го вида – 70, 2-го вида –135, 3-го вида – 0, 4-го вида – 0.

Вариант 8

Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара, используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2.

Плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи приведены ниже.

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	A	B	C	D	
Расход рабочего времени на единицу товара, ч	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара, м^2	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара, р.	5	8	7	9	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Ответ. Максимальная прибыль 16 200 р. при продаже количества товара A – 0, товара B –0, товара C – 0, товара D – 1800.

Вариант 9

Из четырех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества A, 30 ед. – вещества B и 24 ед. – вещества C. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, цена 1 кг сырья каждого вида приведены ниже.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A	1	1	–	4
B	2	–	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья, р.	5	6	7	4

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества веществ данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Ответ: Минимальная стоимость смеси 26 р. при использовании сырья 1-го вида – 0, 2-го вида –0, 3-го вида – 0, 4-го вида –6,5 кг.

Вариант 10

Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида, общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, цена одного изделия каждого вида, ограничения на возможный выпуск каждого из изделий приведены ниже.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования в нормочасах:				
I типа	2	–	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырье, кг:				
1-го вида	10	15	20	1 495
2-го вида	30	20	25	4 500
Цена одного изделия, р.	10	15	20	
Выпуск (шт.):				
минимальный	10	20	25	
максимальный	20	40	100	

Составить план производства продукции, по которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, при максимальной общей стоимости всей изготовляемой продукции.

Ответ. Максимальная общая стоимость изготовленной продукции 1 495 р. при выпуске продукции 1-го вида – 10, 2-го вида – 33, 3-го вида – 45.

Вариант 11

При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида для каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции приведены ниже.

Технологическая операция	Нормы затрат времени, ч, на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени, ч
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7 200
Наложение изоляций	1,0	0,4	0,8	0,7	5 600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Освинцовывание	3,0	–	1,8	2,4	3 600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4 200
Прибыль от реализации 1 км кабеля, р.	1,2	0,8	1,0	1,3	

Определить план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

Ответ. Максимальная прибыль от реализации кабеля 1 939,43 р. при выпуске кабеля 1-го вида – 1 200 км, 2-го вида – 624,29 км, 3-го вида – 0, 4-го вида – 0.

Вариант 12

Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены ниже.

Длина заготовки, см.	Варианты разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	–	–	–
35		1	–	3	1	–
50	–	–	1	-	1	2
Величина отходов, см.	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

Ответ. Минимальные отходы равны 550 см при количестве прутьев 10, 0, 20, 10, 0, 0 шт. соответственно по 1-6 вариантам разреза.

Вариант 13

Для производства трех видов изделий А, В, С предприятие использует четыре вида сырья. Нормы затрат сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида, прибыль от реализации одного изделия каждого вида приведены ниже.

Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг, на единицу продукции		
	A	B	C
I	2	3	–
II	–	4	6
III	5	5	2
IV	4	–	7
Прибыль от реализации одного изделия	25	28	27

Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но для их производства предприятие может использовать сырье I вида не более 200 кг, II вида – не более 120 кг, III вида – не более 180 кг, IV вида – не более 138 кг.

Определить план производства продукции, при котором общая прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы наибольшей.

Ответ. План производства изделий А – 17 кг, В – 15 кг, С – 10 кг при максимальной общей прибыли 1115 кг.

Вариант 14

Туристическое агентство собирается заказать издательству выпуск художественных альбомов трех типов А, В, С. Их изготовление лимитируется затратами ресурсов трех видов, удельные расходы которых приведены ниже.

Вид ресурса	Удельные затраты ресурсов на выпуск альбомов		
	A	B	C
Финансы, р.	2	1	4
Бумага, л.	4	2	2
Трудозатраты, чел. ч	1	1	2

Издательство для выполнения заказа получило финансовые средства в объеме 3 600 р, имеет в наличии 52 000 л. бумаги и может использовать трудовые ресурсы в объеме 2 200 чел./ч.

Агентство платит за выпуск одного альбома типа А – 22 р., за альбом типа В – 18 р., за альбом типа С – 30 р.

Сколько альбомов каждого типа должно выпустить издательство, чтобы получить наибольшую прибыль?

Ответ. Максимальная суммарная прибыль – 45 200 р., количество альбомов типа А –1 400 шт, типа В – 800 шт, типа С – 0 шт.

Вариант 15

Предприятие оптовой торговли может реализовать T_j, j = 1, 2, 3, 4 групп товаров. Для этого используется несколько видов ресурсов. Исходные данные для построения математической модели приведены ниже.

Лимитирующие ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Вид ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Складские площади, $м^2$	18	26	16	10	110 000	$\leq$
Трудовые ресурсы, чел.ч	150	140	50	80	950 000	$\leq$
Издержки обращения, ден. ед.	170	230	280	120	1 200 000	$\leq$
Товарные запасы, ден. ед.	31	42	30	20	180 000	$\leq$
План товарооборота, ден. ед.	200	150	170	50	750 000	$\geq$
Минимально допустимые значения товарооборота по j-й группе, ед.	1 200	1 000	1 500	1 200		$\geq$
Прибыль в расчете на единицу товарооборота j-й группы, ден. ед.	120	50	30	100		

Требуется определить план хозяйственной деятельности торгового предприятия, обеспечивающий максимум прибыли при заданных ограничениях на складские площади, трудовые ресурсы, издержки обращения, товарные запасы, величину товарооборота, если торговая прибыль в расчете на единицу товарооборота j -й группы задана.

Ответ. Максимальна прибыль – 518 000 ден. ед. Товарооборот по группам: T_1 – 1 200 ед., T_2 – 1 000 ед., T_3 – 1 500 ед., T_4 – 2 790 ед.,

Работа № 3

Транспортная задача

Задание

Производственное объединение в своём составе имеет n филиалов A_i, i=1, 2,…, n, которые производят однородную продукцию в количестве a_i, i=1, 2,…, n. Эту продукцию получают m потребителей B_j, j=1, 2, …, m, расположенных в разных местах. Их потребности соответственно равны b_j, j=1, 2, …, m. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов потребителям задаются матрицей C_{ij} (i=1, 2,…, n; j=1, 2, …, m).

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1m}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2		b_m	

Составить план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок была минимальной.

1. Построить математическую модель задачи.
2. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных.
3. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
4. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
5. Вывести отчеты по результатам и устойчивости.

Вариант 1

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	2	3	12	180
A_2	3	4	8	7	160
A_3	4	5	6	12	140
A_4	7	1	5	6	220
Потребности	150	250	120	180	

Вариант 2

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	9	200
A_2	5	1	8	12	270
A_3	11	6	4	3	130
Потребности	120	80	240	160	

Вариант 3

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	60
A_3	3	1	4	2	150
Потребности	120	40	60	80	

Вариант 4

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	

Вариант 5

Филиалы	Потребители					Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	6	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Потребности	110	90	120	80	150	

Вариант 6

Филиалы	Потребители					Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	

Вариант 7

Филиалы	Потребители					Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	2	8	6	115
A_2	3	1	9	7	3	175
A_3	9	6	7	2	1	130
Потребности	70	220	40	30	60	

Вариант 8

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	7	280
A_2	7	6	2	9	175
A_3	1	3	9	8	125
A_4	2	4	5	6	130
Потребности	90	180	310	130	

Вариант 9

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	8	7	510
A_2	5	6	8	9	90
A_3	7	2	4	8	120
Потребности	270	140	200	110	

Вариант 10

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Потребности	90	90	100	160	

Вариант 11

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности	80	80	70	130	

Вариант 12

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	100
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

Вариант 13

Филиалы	Потребители				Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	160
Потребности	45	45	200	140	

Вариант 14

Филиалы	Потребители					Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	

Вариант 15

Филиалы	Потребители					Производство
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Потребности	110	90	120	80	150	

Работа № 4

Задача о назначении

Задание

На n типовых операций необходимо назначить n рабочих. Стоимость C_{ij} выполнения i-м рабочим j-й операции приведена в таблице. Требуется найти такие назначения рабочих, при которых все операции были бы выполнены, каждый рабочий занят только на выполнении одной операции, суммарная стоимость работ при этом была минимальной.

Рабочие	Операции			
	O_1	O_2	…	O_n
P_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}
P_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}
…	…	…	…	…
P_n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nn}

1. Построить математическую модель задачи.
2. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных.
3. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
4. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
5. Вывести отчет по результатам.

Вариант 1

Рабочие	Операции			
	O_1	O_2	O_3	O_4
P_1	60	52	45	40
P_2	65	46	45	52
P_3	72	50	70	44
P_4	30	30	50	62

Вариант 2

Рабочие	Операции			
	O_1	O_2	O_3	O_4
P_1	112	110	90	95
P_2	80	100	80	95
P_3	70	68	85	70
P_4	75	60	79	70

Вариант 3

Рабочие	Операции			
	O_1	O_2	O_3	O_4
P_1	20	15	20	14
P_2	22	10	12	15
P_3	12	22	20	30
P_4	10	12	15	14

Вариант 4

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	16	12	23	12	20
P_2	20	15	20	14	18
P_3	22	10	12	15	20
P_4	11	22	20	30	12
P_5	10	12	15	14	15

Вариант 5

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	16	12	10	12	18
P_2	20	15	8	14	25
P_3	22	10	11	9	16
P_4	15	22	17	30	22

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_5	20	12	15	14	15

Вариант 6

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	11	8	9	10	9
P_2	9	10	8	14	15
P_3	10	12	12	9	11
P_4	12	10	11	30	10
P_5	14	12	13	14	12

Вариант 7

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	220	180	200	160	180
P_2	230	180	200	190	240
P_3	210	150	200	200	210
P_4	200	170	210	200	180
P_5	250	160	190	195	190

Вариант 8

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	50	80	90	80	70
P_2	70	50	95	90	85
P_3	58	85	80	59	95
P_4	60	60	75	60	70
P_5	65	65	70	71	68

Вариант 9

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	12	10	10	8	15
P_2	13	12	15	14	18
P_3	10	12	12	15	14
P_4	9	10	10	13	14
P_5	12	12	10	10	14

Вариант 10

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	22	20	16	18	25
P_2	23	22	25	24	28
P_3	20	15	22	25	24
P_4	19	20	20	23	24
P_5	22	22	20	20	24

Вариант 11

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	32	30	26	28	35
P_2	33	35	32	34	38
P_3	30	40	32	35	34
P_4	29	30	30	33	34
P_5	32	32	30	30	34

Вариант 12

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	320	270	270	280	350
P_2	330	350	320	340	380

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_3	300	380	320	350	340
P_4	290	300	300	330	340
P_5	320	320	300	320	340

Вариант 13

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	330	280	270	290	360
P_2	340	360	330	350	390
P_3	310	390	290	360	350
P_4	300	310	310	340	350
P_5	330	300	290	300	350

Вариант 14

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	295	245	235	255	325
P_2	305	290	295	315	355
P_3	275	355	255	325	315
P_4	265	270	275	300	315
P_5	295	265	250	265	315

Вариант 15

Рабочие	Операции				
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	220	170	160	180	250
P_2	230	215	200	240	280
P_3	200	280	200	250	240
P_4	190	195	180	225	240
P_5	220	190	175	190	240

Работа № 5

Нелинейное программирование

Задание

1. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных.
2. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
3. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения.
4. Вывести отчет по результатам.

Вариант 1

Найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 2

Найти максимальное значение функции

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 3

Найти максимальное значение функции

$$F = 3x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 4

Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 5

Найти минимальное значение функции

$$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 6

Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 7

Найти максимальное значение функции

$$F = 4x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Вариант 8

Найти максимальное значение функции

$$F = x_1^2 x_2^3 x_3^4$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

Вариант 9

Найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 10

Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 + 4x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 11

Найти максимальное значение функции

$$F = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 12

Найти максимальное значение функции

$$F = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \le -8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 13

Найти максимальное значение функции

$$F = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18 \\ x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_3 \le 14 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 14

Найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 15

Найти максимальное значение функции

$$F = 6x_2 + 6x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 +$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_3 \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Работа № 6

Системы линейных алгебраических уравнений

Задание

Решить систему линейных алгебраических уравнений четвертого порядка.

1. Создать на рабочем листе Excel таблицу для ввода исходных данных;
2. Заполнить таблицу исходными данными и необходимыми формулами.
3. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения;

Вариант 1

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} -9x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 31 \\ -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -14 \\ 9x_1 - 5x_2 + x_3 = 7 \\ -11x_2 - 13x_3 + 2x_4 = 32 \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 33 \\ 9x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \\ -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -13 \\ -7x_2 - 11x_3 - 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 5 \\ -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 28 \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 = -7 \\ -6x_1 - 11x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 - 11x_3 + 8x_4 = 51 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -5 \\ -5x_2 - 13x_3 + 4x_4 = 38 \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 5x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 6 \\ 9x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 51 \\ 10x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 14 \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} -3x_1 - 11x_2 - 13x_3 + 12x_4 = 9 \\ 7x_2 - 9x_3 + 6x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 15 \\ 12x_1 + x_2 + 11x_3 + 2x_4 = -14 \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -7 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_1 - 11x_2 - x_3 + 6x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 9 \\ -2x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ -14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -16 \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -9x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -14 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 6 \\ 3x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 8x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 2 \\ 7x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = -8 \\ -5x_2 - 7x_3 + 8x_4 = -12 \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 11x_3 = -8 \\ -3x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 12x_4 = -6 \\ 9x_2 - 11x_3 = -2 \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 9x_3 = 70 \\ 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 6x_4 = 80 \\ -8x_1 - 5x_2 - x_3 + 6x_4 = -35 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -5 \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -20 \\ -6x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 10x_4 = -5 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 40 \\ 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Заключение

Таким образом, мы рассмотрели решение оптимизационных задач в электронных таблицах MS Excel 2010 с помощью надстройки Поиск решения. Дали описание настройки рассматриваемого инструмента, его параметров, алгоритма использования.

На примере задач линейного, нелинейного программирования, систем линейных алгебраических уравнений показали, как можно использовать электронные таблицы для решения задач данного класса. К тому же привели задания, которые позволят закрепить представленный материал.

Авторы не ставили своей задачей дать исчерпывающее описание всех классов задач, решаемых с помощью надстройки Поиск решения. Дополнительные возможности по изучению рассматриваемого материала можно почерпнуть в других источниках.

Материал пособия может быть использован при изучении раздела моделирования в курсе информатики.

Рекомендательный библиографический список

1. *Акулич, И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / И. Л. Акулич. – СПб. : Лань, 2009. – 532 с.
2. *Васильев, А. Н.* Финансовое моделирование и оптимизация средствами Excel2007 / А. Н. Васильев. – СПб. : Питер, 2009. – 320 с.
3. *Гарнаев, А. Ю.* Microsoft Excel 2010: разработка приложений / А. Ю. Гарнаев, Л. В. Рудикова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 528 с.
4. *Глухов, В. В.* Математические методы и модели для менеджмента : учеб. пособие / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробков. – СПб. : Лань, 2007. – 528 с.

5. *Иванов*, *И*. Microsoft Excel 2010 для квалифицированного пользователя / И. Иванов. – М. : Академия АЙТИ, 2011. – 244 с.

6. *Леоненков, А. В.* Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. В. Леоненков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 704 с.

7. *Пикуза*, В. Экономические расчеты и бизнес-моделирование в Excel / В. Пикуза. – СПб. : Питер, 2011. – 398 с.

8. *Решение* задач оптимизации управления с помощью MS Excel 2010 // НОУ «ИНТУИТ» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.intuit.ru/studies/courses/4751/1020/info (дата обращения: 09.12.2015).

9. *Справка* и инструкции по Excel // Поддержка по Microsoft Office [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://office.microsoft.com/ru-ru/excel-help (дата обращения: 14.12.2015).

10. *Токарев*, *В. В.* Модели и решения: исследование операций для экономистов, политологов и менеджеров / В. В. Токарев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 408 с.

11. *Уокенбах, Дж.* Формулы в Microsoft Excel 2010 : пер. с англ. / Дж. Уокенбах. – М. : И. Д. Вильямс, 2011. – 704 с.

12. *Уокенбах, Дж.* Microsoft Excel 2010. Библия пользователя : пер. с англ. / Дж. Уокенбах. – М. : И. Д. Вильямс, 2011. – 912 с.

13. *Экономико-математические* методы и модели. Компьютерные технологии решения : учеб. пособие / И. Л. Акулич, Е. И. Велесько, П. Ройш, В. Ф. Стрельчонок. – Минск : БГЭУ, 1986. – 348 с.

Оглавление

Учебное издание

Шадрина Нина Ивановна, **Берман** Нина Демидовна

Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010

Учебное пособие

Дизайнер *Е. И. Саморядова*

С авторского оригинала-макета

Подписано в печать 04.02.16. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Гарнитура «Калибри».

Печать цифровая. Усл. печ. л. 6,0. Тираж 100 экз. Заказ 91.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.

680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.

680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.